



**Олимпиада школьников «Ломоносов» по высоким технологиям  
2024/25 учебный год. Отборочный этап. 5 – 10 классы  
Решения задач. Критерии оценивания**

**Задача по химии. Патриотическое стекло (6 баллов)**

**Вариант 1**



Перед одним из отечественных предприятий поставлена задача изготовить три вида стекла в цветах государственного флага Российской Федерации (1, 2, 3). За основу взят состав оконного стекла.

**Какие дополнительные компоненты нужно использовать для придания стеклу соответствующей окраски (условия варки будут подобраны в каждом случае индивидуально)? Для каждого цвета укажите только одно вещество.**

- А)  $\text{CuO}$
- Б)  $\text{Fe}_2\text{O}_3$
- В)  $\text{CrO}_3$
- Г)  $\text{CdSe}$
- Д)  $\text{AlF}_3$
- Е)  $\text{KMnO}_4$

**По 2 балла за каждый правильный выбор. Всего – 6 баллов.**

**Решение варианта 1**

Для создания молочного (непрозрачного, глушеного) стекла необходимо использовать глушитель, то есть вещество, которое не будет растворяться в стекле или будет из него кристаллизироваться. В обоих случаях на кристаллах или каплях выделяющейся новой фазы будет происходить рассеяние света. Для этих целей подходит фторид алюминия. Заметим, что из всех вариантов ответа он единственный, не придающий стеклу окраску.

Для окрашивания стекла в синий или голубой цвет возможно использование меди. Ионы меди придают оконному стеклу такую же окраску, как и водному раствору.

Красный цвет в стекле удастся создать только наночастицами, так как соединения хрома(+6), имеющие оранжевую или красную окраску при температуре размягчения стекла (больше 1000 градусов) разлагаются. Красный цвет стеклу придают наночастицы селенида кадмия. Именно они и ответственны за цвет кремлевских звезд.

**Ответ.** 1 – Д), 2 – А), 3 – Г)

**Вариант 2**

Перед одним из отечественных предприятий поставлена задача изготовить три вида стекла в цветах государственного флага Российской Федерации (1, 2, 3). За основу взят состав оконного стекла.

**Какие дополнительные компоненты нужно использовать для придания стеклу соответствующей окраски (условия варки будут подобраны в каждом случае индивидуально)? Для каждого цвета укажите только одно вещество.**

- А)  $\text{MnO}_2$
- Б)  $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$
- В)  $\text{NiO}$
- Г)  $\text{CaF}_2$
- Д)  $(\text{NH}_4)_2\text{Cr}_2\text{O}_7$
- Е)  $\text{K}[\text{AuCl}_4]$

**По 2 балла за каждый правильный выбор. Всего – 6 баллов.**

**Решение варианта 2**

Для создания молочного (непрозрачного, глушеного) стекла необходимо использовать глушитель, то есть вещество, которое не будет растворяться в стекле или будет из него кристаллизоваться. В обоих случаях на кристаллах или каплях выделяющейся новой фазы будет происходить рассеяние света. Для этих целей подходит фторид кальция. Заметим, что из всех вариантов ответа он единственный, не придающий стеклу окраску.

Для окрашивания стекла в синий цвет используют соединения кобальта. Именно кобальт обуславливает синюю окраску и пигмента гжельской керамики.

Красный цвет в стекле удастся создать только наночастицами, так как соединения хрома(+6), имеющие оранжевую или красную окраску при температуре размягчения стекла (больше 1000 градусов) разлагаются. Красный цвет стеклу придают наночастицы золота, образующиеся при разложении его соединений.

*Ответ. 1 – Г), 2 – Б), 3 – Е)*

**Вариант 3**

Перед одним из отечественных предприятий поставлена задача изготовить три вида стекла в цветах государственного флага Российской Федерации (1, 2, 3). За основу взят состав оконного стекла.

**Какие дополнительные компоненты нужно использовать для придания стеклу соответствующей окраски (условия варки будут подобраны в каждом случае индивидуально)? Для каждого цвета укажите только одно вещество.**

- А)  $\text{Cu}_2(\text{OH})_2\text{CO}_3$
- Б)  $\text{KMnO}_4$
- В)  $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$
- Г)  $\text{Cr}_2\text{O}_3$
- Д)  $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$
- Е)  $\text{CdSe}$

**По 2 балла за каждый правильный выбор. Всего – 6 баллов.**

**Решение варианта 3**

Для создания молочного (непрозрачного, глушеного) стекла необходимо использовать глушитель, то есть вещество, которое не будет растворяться в стекле или будет из него кристаллизоваться. В обоих случаях на кристаллах или каплях выделяющейся новой фазы будет происходить рассеяние света. Для этих целей подходит фосфат кальция. Заметим, что из всех вариантов ответа он единственный, не придающий стеклу окраску.

Для окрашивания стекла в синий или голубой цвет возможно использование меди. Ионы меди придают оконному стеклу такую же окраску, как и водному раствору.

Красный цвет стеклу придают наночастицы селенида кадмия. Именно они и ответственны за цвет кремлевских звезд.

*Ответ. 1 – В), 2 – А), 3 – Е)*

**Вариант 4**

Перед одним из отечественных предприятий поставлена задача изготовить три вида стекла в цветах государственного флага Российской Федерации (1, 2, 3). За основу взят состав оконного стекла.

**Какие дополнительные компоненты нужно использовать для придания стеклу соответствующей окраски (условия варки будут подобраны в каждом случае индивидуально)? Для каждого цвета укажите только одно вещество.**

- А)  $\text{AlF}_3$
- Б)  $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$
- В)  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$
- Г)  $\text{NiSO}_4$
- Д)  $\text{K}[\text{AuCl}_4]$
- Е)  $\text{KMnO}_4$

***По 2 балла за каждый правильный выбор. Всего – 6 баллов.***

**Решение варианта 4**

Для создания молочного (непрозрачного, глушеного) стекла необходимо использовать глушитель, то есть вещество, которое не будет растворяться в стекле или будет из него кристаллизоваться. В обоих случаях на кристаллах или каплях выделяющейся новой фазы будет происходить рассеяние света. Для этих целей подходит фторид алюминия. Заметим, что из всех вариантов ответа он единственный, не придающий стеклу окраску.

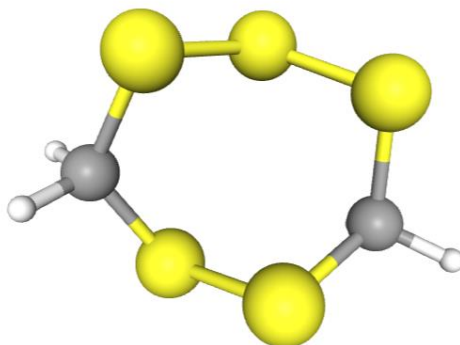
Для окрашивания стекла в синий цвет возможно использование кобальта. Именно кобальт обуславливает синюю окраску и пигмента гжельской керамики.

Красный цвет в стекле удастся создать только наночастицами, так как соединения хрома(+6), имеющие оранжевую или красную окраску при температуре размягчения стекла (больше 1000 градусов) разлагаются. Красный цвет стеклу придают наночастицы золота, образующиеся при разложении его соединений.

*Ответ. 1 – А), 2 – Б), 3 – Д)*

**Задача по химии. Грибной запах (9 баллов)****Вариант 1**

Один из самых съедобных грибов в мире содержит пахучее вещество, молекула которого изображена ниже. Желтым цветом обозначены атомы серы, серым – углерода, белым – водорода.

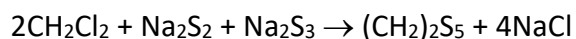


1. Предложите разумный способ синтеза этого вещества. (6 баллов)
2. Каково тривиальное название этого вещества и чем оно известно? (3 балла)

**Всего – 9 баллов**

**Решение варианта 1**

1. Способ синтеза – конденсация дихлорметана с ди- и трисульфидом натрия:



2. Тривиальное название – лентионин. Основа запаха многих грибов, производное от названия древнего азиатского гриба шиитаке, *Lentinula edodes* (лентинула съедобная), это «грибной фунгицид».

**Вариант 2**

Запах некоторых популярных грибов обусловлен присутствием вещества X, которое содержит 2.1 масс.% водорода, 12.8% углерода, остальное – сера.

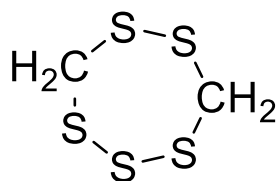
Определите молекулярную формулу вещества (3 балла) и установите его структуру (6 баллов), если известно, что: а) молекула включает цикл из 7 атомов, б) в молекуле – 3 ковалентные неполярные связи, в) каждый атом серы связан не более, чем с одним атомом углерода.

**Всего – 9 баллов**

### Решение варианта 2

1.  $H : C : S = (2.1/1) : (12.8/12) : (85.1/32) = 2.1 : 1.07 : 2.66 = 2 : 1 : 2.5 = 4 : 2 : 5.$

Молекулярная формула X –  $C_4H_2S_5$ .



2. Структура X –

### Вариант 3



Запах некоторых съедобных грибов обусловлен присутствием вещества Z, которое состоит из углерода, серы и водорода. Про вещество известно, что:

- а) его пары в 94 раза тяжелее водорода,
- б) число атомов серы в 2,5 раза больше числа атомов углерода,
- в) молекула – циклическая,
- г) в молекуле – 3 связи S–S и 4 связи C–S, связей S–H нет.

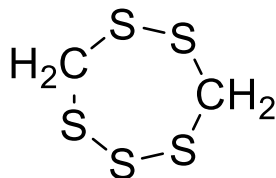
Определите молекулярную формулу вещества (3 балла) и установите его структуру (6 баллов).

**Всего – 9 баллов**

**Решение варианта 3**

1.  $C_xH_yS_z$ .  $M = 94 \cdot 2 = 188 \text{ г/моль} = 12x + y + 32z$ .

Минимальное значение  $z = 5$ , тогда  $x = 2$ ,  $y = 4$ . Молекулярная формула Z –  $C_4H_2S_5$ .



2. Структура Z –

**Вариант 4**

Запах некоторых популярных грибов обусловлен присутствием вещества Y, которое имеет общую формулу  $(CH_2)_xS_y$ . Молекула имеет циклическую структуру, атомы C в цикле изолированы друг от друга, а каждый атом серы участвует хотя бы в одной ковалентной неполярной связи. Пары вещества Y имеют плотность 4.00 г/л при 300 °C и 1 атм.

Определите молекулярную формулу вещества и установите его структуру.

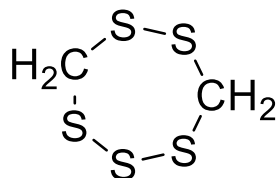
**Определите молекулярную формулу вещества (3 балла) и установите его структуру (6 баллов).**

**Всего – 9 баллов**

**Решение варианта 4**

1.  $Y - C_xH_yS_z$ .  $M(Y) = \rho RT / P = 4.00 \cdot 8.314 \cdot 573 / 101.3 = 188 \text{ г/моль} = 12x + y + 32z$ .

Решение уравнения:  $z = 5$ ,  $x = 2$ ,  $y = 4$ . Молекулярная формула Y –  $C_2H_4S_5$ .



2. Структура Y –

**Задача по химии. Оксид для электрохромных материалов (10 баллов)****Вариант 1**

Одним из материалов для электрохромных устройств является оксид X металла M. Этот оксид может быть получен двумя способами. Первый заключается в сжигании опилок металла M на воздухе. В результате образуется желтоватый порошок, а масса твердого вещества увеличивается на 26.1%. Второй способ состоит в термическом разложении соединения Y, в результате которого единственным твёрдым продуктом является оксид X. При этом из 0.01 моль Y образуется 27.84 г оксида X.

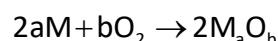
1. **Определите металл M и состав оксида X. Напишите уравнение реакции окисления металла M до оксида X. (4 балла)**
2. **Определите состав соединения Y, если оно содержит 1.37 масс.% водорода, 4.57 масс.% азота, 72.11 масс.% металла M, а остальное – кислород. (5 баллов)**
3. **Определите степень окисления металла M в соединении Y. (1 балл)**

Все ответы подтверждайте расчётами. В расчётах все атомные массы считайте целочисленными.

**Всего – 10 баллов**

**Решение варианта 1**

1. Схема окисления металла M:



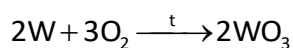
Согласно этой схеме, молярная масса увеличилась на  $16b$ . Пусть атомная масса металла M равна  $m$ . Тогда

$$\frac{16b}{ma} = 0.261$$

$$m = 61.303 \cdot \frac{b}{a}$$

При  $a = 1$  и  $b = 3$  получаем  $m \approx 184$ , что соответствует вольфраму. Значит, M – вольфрам W, а оксид X –  $WO_3$ .





Металл М – 2 балла, оксид Х – 1 балл, уравнение реакции – 1 балл. Всего – 4 балла.

2. Количество  $WO_3$  при разложении 0.01 моль соединения Y равно

$$\frac{m(WO_3)}{M(WO_3)} = \frac{27.84}{232} = 0.12 \text{ моль}$$

Из 0.01 моль Y образуется 0.12 моль оксида вольфрама, то есть одна формульная единица Y содержит 12 атомов W.

В общем виде формулу соединения Y можно записать как  $H_xN_yW_{12}O_z$ .

Содержание кислорода в % равно:  $100 - (1.37 + 4.57 + 72.11) = 21.95$

$$\frac{\omega(H)}{\omega(W)} = \frac{1.37 \cdot 184}{72.11 \cdot 1} = \frac{x}{12}$$
$$x = 42$$

$$\frac{\omega(N)}{\omega(W)} = \frac{4.57 \cdot 184}{72.11 \cdot 14} = \frac{y}{12}$$
$$y = 10$$

$$\frac{\omega(O)}{\omega(W)} = \frac{21.95 \cdot 184}{72.11 \cdot 16} = \frac{z}{12}$$
$$z = 42$$

Таким образом, брутто-формула  $H_{42}N_{10}W_{12}O_{42}$ , а истинная формула  $(NH_4)_{10}H_2W_{12}O_{42}$ .

Правильная формула – 5 баллов.

3. Степень окисления азота в катионе аммония равна -3, степень окисления водорода +1, степень окисления кислорода -2.

$$-3 \cdot 10 + 1 \cdot 42 + x \cdot 12 + (-2) \cdot 42 = 0$$

$x = +6$ . Степень окисления вольфрама равна +6.

Правильная степень окисления – 1 балл.

**Вариант 2**

Одним из материалов для электрохромных устройств является оксид X металла М.

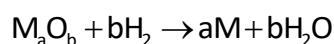
1. При восстановлении X до М водородом потеря массы твёрдого вещества составляет 20.7%. Установите формулы X и М. (4 балла)
2. Оксид X получают термическим разложением соединения Z, при этом из 0.01 моль Z образуется 27.84 г оксида X. Определите состав соединения Z, если оно содержит 1.60 масс.% водорода, 4.47 масс.% азота, 70.45 масс.% металла М, остальное – кислород. (5 баллов)
3. Определите степень окисления металла М в соединении Z. (1 балл)

Все ответы подтверждайте расчётами. В расчётах все атомные массы считайте целочисленными.

**Всего – 10 баллов**

**Решение варианта 2**

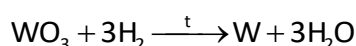
1. Схема восстановления оксида X до металла М:



Согласно этой схеме, молярная масса уменьшилась на 16b. Пусть атомная масса металла М равна m. Тогда

$$\frac{16b}{ma + 16b} = 0.207$$
$$m = 61.3 \cdot \frac{b}{a}$$

При  $a = 1$  и  $b = 3$  получаем  $m \approx 184$ , что соответствует вольфраму. Значит, М – вольфрам W, а оксид X –  $WO_3$ .



Металл М – 2 балла, оксид X – 1 балл, уравнение реакции – 1 балл. Всего – 4 балла.

2. Количество  $\text{WO}_3$  при разложении 0.01 моль соединения Z равно

$$\frac{m(\text{WO}_3)}{M(\text{WO}_3)} = \frac{27,84}{232} = 0.12 \text{ моль}$$

Из 0.01 моль Z образуется 0.12 моль оксида вольфрама, то есть одна формульная единица Z содержит 12 атомов W.

В общем виде формулу соединения Z можно записать как  $\text{H}_x\text{N}_y\text{W}_{12}\text{O}_z$ .

Содержание кислорода в % равно:  $100 - (1.60 + 4.47 + 70.45) = 23.48$

$$\frac{\omega(\text{H})}{\omega(\text{W})} = \frac{1.60 \cdot 184}{70.45 \cdot 1} = \frac{x}{12}$$
$$x = 50$$

$$\frac{\omega(\text{N})}{\omega(\text{W})} = \frac{4.47 \cdot 184}{70.45 \cdot 14} = \frac{y}{12}$$
$$y = 10$$

$$\frac{\omega(\text{O})}{\omega(\text{W})} = \frac{23.48 \cdot 184}{70.45 \cdot 16} = \frac{z}{12}$$
$$z = 46$$

Таким образом, брутто-формула  $\text{H}_{50}\text{N}_{10}\text{W}_{12}\text{O}_{46}$ , а истинная формула  $(\text{NH}_4)_{10}\text{H}_2\text{W}_{12}\text{O}_{42} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ .

*Правильная формула – 5 баллов.*

3. Степень окисления азота в катионе аммония равна -3, степень окисления водорода +1, степень окисления кислорода -2.

$$-3 \cdot 10 + 1 \cdot 42 + x \cdot 12 + (-2) \cdot 42 = 0$$

$x = +6$ . Степень окисления вольфрама равна +6.

*Правильная степень окисления – 1 балл.*

**Вариант 3**

Одним из материалов для электрохромных устройств является оксид X металла M.

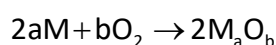
1. При окислении M до X в кислороде масса твёрдого вещества увеличивается на 26.1%. Установите формулы X и M. (4 балла)
2. Оксид X получают термическим разложением соединения Q, при этом из 0.02 моль Q образуется 55.68 г оксида X. Определите состав соединения Q, если оно содержит 1.70 масс.% водорода, 4.42 масс.% азота, 69.65 масс.% металла M, остальное – кислород. (5 баллов)
3. Определите степень окисления металла M в соединении Q. (1 балл)

Все ответы подтверждайте расчётами. В расчётах все атомные массы считайте целочисленными.

**Всего – 10 баллов**

**Решение варианта 3**

1. Схема окисления металла M:

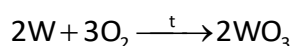


Согласно этой схеме, молярная масса увеличилась на  $16b$ . Пусть атомная масса металла M равна  $m$ . Тогда

$$\frac{16b}{ma} = 0.261$$

$$m = 61.303 \cdot \frac{b}{a}$$

При  $a = 1$  и  $b = 3$  получаем  $m \approx 184$ , что соответствует вольфраму. Значит, M – вольфрам W, а оксид X –  $WO_3$ .



Металл M – 2 балла, оксид X – 1 балл, уравнение реакции – 1 балл. Всего – 4 балла.

2. Количество  $\text{WO}_3$  при разложении 0.02 моль соединения Q равно

$$\frac{m(\text{WO}_3)}{M(\text{WO}_3)} = \frac{55.68}{232} = 0.24 \text{ моль}$$

Из 0.02 моль соединения Q образуется 0.24 моль оксида вольфрама, то есть одна формульная единица Q содержит 12 атомов W.

В общем виде формулу соединения Q можно записать как  $\text{H}_x\text{N}_y\text{W}_{12}\text{O}_z$ .

Содержание кислорода в % равно:  $100 - (1.70 + 4.42 + 69.65) = 24.23$ .

$$\frac{\omega(\text{H})}{\omega(\text{W})} = \frac{1.70 \cdot 184}{69.65 \cdot 1} = \frac{x}{12}$$
$$x = 54$$

$$\frac{\omega(\text{N})}{\omega(\text{W})} = \frac{4.42 \cdot 184}{69.65 \cdot 14} = \frac{y}{12}$$
$$y = 10$$

$$\frac{\omega(\text{O})}{\omega(\text{W})} = \frac{24.23 \cdot 184}{69.65 \cdot 16} = \frac{z}{12}$$
$$z = 48$$

Таким образом, брутто-формула  $\text{H}_{54}\text{N}_{10}\text{W}_{12}\text{O}_{48}$ , а истинная формула  $(\text{NH}_4)_{10}\text{H}_2\text{W}_{12}\text{O}_{42} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ .

*Правильная формула – 5 баллов.*

3. Степень окисления азота в катионе аммония равна -3, степень окисления водорода +1, степень окисления кислорода -2.

$$-3 \cdot 10 + 1 \cdot 42 + x \cdot 12 + (-2) \cdot 42 = 0$$

$x = +6$ . Степень окисления вольфрама равна +6.

*Правильная степень окисления – 1 балл.*

**Вариант 4**

Одним из материалов для электрохромных устройств является оксид X металла M.

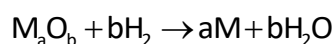
1. При восстановлении X до M водородом потеря массы твёрдого вещества составляет 20.7%. Установите формулы X и M. (4 балла)
2. Оксид X получают термическим разложением соединения R, при этом из 0.02 моль R образуется 55.68 г оксида X. Определите состав соединения R, если оно содержит 1.91 масс.% водорода, 4.32 масс.% азота, 68.11 масс.% металла M, остальное – кислород. (5 баллов)
3. Определите степень окисления металла M в соединении R. (1 балл)

Все ответы подтверждайте расчётами. В расчётах все атомные массы считайте целочисленными.

**Всего – 10 баллов**

**Решение варианта 4**

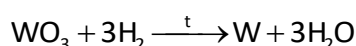
1. Схема восстановления оксида X до металла M:



Согласно этой схеме, молярная масса уменьшилась на 16b. Пусть атомная масса металла M равна m. Тогда

$$\frac{16b}{ma + 16b} = 0.207$$
$$m = 61.3 \cdot \frac{b}{a}$$

При  $a = 1$  и  $b = 3$  получаем  $m \approx 184$ , что соответствует вольфраму. Значит, M – вольфрам W, а оксид X –  $WO_3$ .



Металл M – 2 балла, оксид X – 1 балл, уравнение реакции – 1 балл. Всего – 4 балла.

2. Количество  $\text{WO}_3$  при разложении 0.02 моль соединения R равно

$$\frac{m(\text{WO}_3)}{M(\text{WO}_3)} = \frac{55.68}{232} = 0.24 \text{ моль}$$

Из 0.02 моль соединения R образуется 0.24 моль оксида вольфрама, то есть одна формульная единица R содержит 12 атомов W.

В общем виде формулу соединения R можно записать как  $\text{H}_x\text{N}_y\text{W}_{12}\text{O}_z$ .

Содержание кислорода в % равно:  $100 - (1.91 + 4.32 + 68.11) = 25.66$ .

$$\frac{\omega(\text{H})}{\omega(\text{W})} = \frac{1.91 \cdot 184}{68.11 \cdot 1} = \frac{x}{12}$$
$$x = 62$$

$$\frac{\omega(\text{N})}{\omega(\text{W})} = \frac{4.32 \cdot 184}{68.11 \cdot 14} = \frac{y}{12}$$
$$y = 10$$

$$\frac{\omega(\text{O})}{\omega(\text{W})} = \frac{25.66 \cdot 184}{68.11 \cdot 16} = \frac{z}{12}$$
$$z = 52$$

Таким образом, брутто-формула  $\text{H}_{62}\text{N}_{10}\text{W}_{12}\text{O}_{52}$ , а истинная формула  $(\text{NH}_4)_{10}\text{H}_2\text{W}_{12}\text{O}_{42} \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ .

*Правильная формула – 5 баллов.*

3. Степень окисления азота в катионе аммония равна -3, степень окисления водорода +1, степень окисления кислорода -2.

$$-3 \cdot 10 + 1 \cdot 42 + x \cdot 12 + (-2) \cdot 42 = 0$$

$x = +6$ . Степень окисления вольфрама равна +6.

*Правильная степень окисления – 1 балл.*

**Задача по физике. Полет к другой планете (9 баллов)****Вариант 1**

Существуют программы освоения Марса предполагающие запуск космического корабля. Предположим, что корабль подлетит к Марсу по параболической траектории, вершина которой находится вблизи «красной» планеты. В момент максимального сближения с ней корабль переходит на низкую круговую орбиту, став искусственным спутником. Для этого включается тормозная система корабля, выбрасывающая струю газов.

1. **Определить на сколько должна измениться скорость корабля относительно Марса при торможении. Масса Марса  $M = 6,42 \cdot 10^{23}$  кг, радиус  $R_M = 3390$  км. (6 баллов)**
2. **Какая масса топлива необходима для такого маневра, если считать, что первоначальная масса корабля  $m = 1$  т, а продукты сгорания выбрасываются мгновенно и вылетают со скоростью  $v = 4,35 \cdot 10^3$  м/с относительно корабля вдоль направления скорости. (3 балла)**

**Всего – 9 баллов**

**Решение варианта 1**

1. При движении по параболической траектории космический корабль имеет в вершине параболы такую минимальную кинетическую энергию, которая позволяет ему улететь затем бесконечно далеко от Марса. На бесконечном расстоянии от Марса потенциальная энергия корабля равна нулю  $E_\infty = 0$  (из условия нормировки). Также и кинетическая энергия корабля равна нулю на бесконечности (следует из параболичности траектории). Это означает, что на бесконечно большом расстоянии от Марса будет равна нулю и полная механическая энергия корабля. Из закона сохранения энергии следует, что и в вершине параболы сумма кинетической  $\frac{mV^2}{2}$  и потенциальной  $-G \frac{mM}{R_M}$  энергий также должна быть равна нулю. Следовательно,

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{mM}{R_M} = 0,$$

отсюда скорость подлета к Марсу (2 космическая марсианская):

$$V_{2k} = \sqrt{2G \frac{M}{R_M}} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$



В процессе торможения скорость корабля должна уменьшиться до первой космической скорости  $V_{1k}$  движения по круговой орбите радиуса  $R_M$ . Так как при движении по круговой орбите центростремительное ускорение  $a = \frac{v^2}{R_M}$  кораблю сообщает сила тяготения, то по II закону Ньютона:

$$\frac{mV^2}{R_M} = G \frac{mM}{R_M^2},$$

откуда

$$V_{1k} = \sqrt{G \frac{M}{R_M}} \approx 3.5 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Следовательно

$$\Delta V = V_{2k} - V_{1k} \approx 1.5 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

2. Для вычисления массы  $\Delta m$  топлива необходимого для такого маневра предположим, что время сгорания топлива очень мало, и что продукты сгорания были выброшены одной порцией. По закону сохранения импульса в системе отсчета, связанной с кораблем:

$$(m - \Delta m)\Delta V - \Delta m v = 0,$$

откуда для массы топлива получим выражение:

$$\Delta m = \frac{\Delta V}{v + \Delta V} m \approx 0.25m = 250 \text{ кг}.$$

Ответ:  $\Delta V = 1.5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ,  $\Delta m = 250 \text{ кг}$ .

## Вариант 2



Исследование Венеры проводится с помощью автоматической межпланетной станции. Для этого космическая станция подлетает к Венере по эллиптической траектории, проходящей вблизи планеты. В момент максимального сближения с ней станция переходит на низкую круговую орбиту ( $h = 100 \text{ км}$  от поверхности), став искусственным спутником. Для этого включается тормозная система станции, выбрасывающая струю газов.

1. Определить скорость станции относительно Венеры перед торможением. Известно, что в процессе торможения изменение скорости  $\Delta V = 2 \cdot 10^3$  м/с. Масса Венеры  $M = 4,85 \cdot 10^{24}$  кг, радиус  $R_B = 6050$  км. (6 баллов)
2. Какая масса топлива необходима для такого маневра, если считать, что первоначальная масса станции  $m = 1$  т, а продукты сгорания выбрасываются мгновенно и вылетают со скоростью  $v = 4.35 \cdot 10^3$  м/с относительно станции вдоль направления скорости. (3 балла)

Всего – 9 баллов

### Решение варианта 2

1. На низкой круговой орбите радиуса  $(R_B + h)$  на межпланетную станцию действует сила притяжения. По II закону Ньютона уравнение движения станции имеет вид:

$$\frac{mV^2}{R_B + h} = G \frac{mM}{(R_B + h)^2}$$

Откуда

$$V = \sqrt{G \frac{M}{(R_B + h)}} \approx 7.25 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Следовательно

$$V_0 = V + \Delta V \approx 9.25 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

2. Для вычисления массы  $\Delta m$  топлива необходимого для такого маневра предположим, что время сгорания топлива очень мало, и что продукты сгорания были выброшены одной порцией. По закону сохранения импульса в системе отсчета, связанной со станцией:

$$(m - \Delta m)\Delta V - \Delta m v = 0,$$

откуда для массы топлива получим выражение:

$$\Delta m = \frac{\Delta V}{v + \Delta V} m \approx 0.315 m = 315 \text{ кг.}$$

Ответ:  $V_0 = 9.25 \cdot 10^3$  м/с,  $\Delta m = 315$  кг.

**Вариант 3**

Исследование Марса проводится с помощью автоматической межпланетной станции. Для этого космическая станция подлетает к Марсу по эллиптической траектории, проходящей вблизи планеты. В момент максимального сближения с ней станция переходит на низкую круговую орбиту ( $h = 200$  км от поверхности), став искусственным спутником. Для этого включается тормозная система станции, выбрасывающая струю газов.

3. **Определить скорость станции относительно Марса перед торможением. Известно, что в процессе торможения изменение скорости  $\Delta V = 1 \cdot 10^3$  м/с. Масса Марса  $M = 6,42 \cdot 10^{23}$  кг, радиус  $R_M = 3390$  км. (6 баллов)**
4. **Какая масса топлива необходима для такого маневра, если считать, что первоначальная масса станции  $m = 1$  т, а продукты сгорания выбрасываются мгновенно и вылетают со скоростью  $v = 4,35 \cdot 10^3$  м/с относительно станции вдоль направления скорости. (3 балла)**

**Всего – 9 баллов**

**Решение варианта 3**

1. На низкой круговой орбите радиуса  $(R_M + h)$  на межпланетную станцию действует сила притяжения. По II закону Ньютона уравнение движения станции имеет вид:

$$\frac{mV^2}{R_M + h} = G \frac{mM}{(R_M + h)^2}$$

Откуда

$$V = \sqrt{G \frac{M}{(R_M + h)}} \approx 3,45 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Следовательно

$$V_0 = V + \Delta V \approx 4,45 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

2. Для вычисления массы  $\Delta m$  топлива необходимого для такого маневра предположим, что время сгорания топлива очень мало, и что продукты сгорания были выброшены одной порцией. По закону сохранения импульса в системе отсчета, связанной со станцией:

$$(m - \Delta m)\Delta V - \Delta m v = 0,$$

откуда для массы топлива получим выражение:

$$\Delta m = \frac{\Delta V}{v + \Delta V} m \approx 0.187 m = 187 \text{ кг.}$$

Ответ:  $V_0 = 4.45 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ,  $\Delta m = 187 \text{ кг}$ .

#### **Вариант 4**



Существуют программы предполагающие запуск космического корабля к Венере. Предположим, что корабль подлетит к Венере по параболической траектории, вершина которой находится вблизи планеты. В момент максимального сближения с ней корабль переходит на низкую круговую орбиту, став искусственным спутником. Для этого включается тормозная система корабля, выбрасывающая струю газов.

1. **Определить на сколько должна измениться скорость корабля относительно Венеры при торможении. Масса Венеры  $M = 4,85 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ , радиус  $R_B = 6050 \text{ км}$ . (6 баллов)**
2. **Какая масса топлива необходима для такого маневра, если считать, что первоначальная масса корабля  $m = 1 \text{ т}$ , а продукты сгорания выбрасываются мгновенно и вылетают со скоростью  $v = 4.35 \cdot 10^3 \text{ м/с}$  относительно корабля вдоль направления скорости. (3 балла)**

**Всего – 9 баллов**

#### **Решение варианта 4**

1. При движении по параболической траектории космический корабль имеет в вершине параболы такую минимальную кинетическую энергию, которая позволяет ему улететь затем бесконечно далеко от Венеры. На бесконечном расстоянии от Венеры потенциальная энергия корабля равна нулю  $E_\infty = 0$  (из условия нормировки). Также и кинетическая энергия корабля равна нулю на бесконечности (следует из параболичности траектории). Это означает, что на бесконечно большом расстоянии от Венеры будет равна нулю и полная механическая энергия корабля. Из закона сохранения энергии следует, что и в вершине параболы сумма кинетической  $\frac{mV^2}{2}$  и потенциальной  $-G \frac{mM}{R_B}$  энергий также должна быть равна нулю. Следовательно,

$$\frac{mV^2}{2} - G \frac{mM}{R_B} = 0,$$

отсюда скорость подлета к Венере (2 космическая венерианская):

$$V_{2k} = \sqrt{2G \frac{M}{R_B}} \approx 10.3 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

В процессе торможения скорость корабля должна уменьшиться до первой космической скорости  $V_{1k}$  движения по круговой орбите радиуса  $R_B$ . Так как при движении по круговой орбите центростремительное ускорение  $a = \frac{V^2}{R_B}$  кораблю сообщает сила тяготения, то по II закону Ньютона:

$$\frac{mV^2}{R_B} = G \frac{mM}{R_B^2},$$

откуда

$$V_{1k} = \sqrt{G \frac{M}{R_B}} \approx 7.3 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Следовательно

$$\Delta V = V_{2k} - V_{1k} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

2. Для вычисления массы  $\Delta m$  топлива необходимого для такого маневра предположим, что время сгорания топлива очень мало, и что продукты сгорания были выброшены одной порцией. По закону сохранения импульса в системе отсчета, связанной с кораблем:

$$(m - \Delta m)\Delta V - \Delta m v = 0,$$

откуда для массы топлива получим выражение:

$$\Delta m = \frac{\Delta V}{v + \Delta V} m \approx 0.408 m = 408 \text{ кг.}$$

Ответ:  $\Delta V = 3 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ,  $\Delta m = 408 \text{ кг}$ .

## Задача по физике. Благородные газы (8 баллов)

### Вариант 1



Для сварки цветных металлов может использоваться смесь двух благородных газов - гелия и аргона. Мольное соотношение газов определяет параметры сварки, поэтому важно знать состав смеси. Для его определения провели следующий эксперимент: два одинаковых цилиндрических сосуда с массивными поршнями, движущимися без трения, заполнили чистым аргоном и исследуемой смесью гелия и аргона. В обоих случаях масса после заполнения увеличилась на  $\Delta m = 5.00$  кг. Затем каждому цилиндру изобарно сообщили одинаковое количество теплоты  $Q$ , в результате чего температура газа в первом цилиндре увеличилась на  $\Delta T_1 = 2.58^\circ\text{C}$ , а во втором – на  $\Delta T_2 = 2.00^\circ\text{C}$ . Молярные массы гелия  $\mu_{\text{He}} = 4$  г/моль и аргона  $\mu_{\text{Ar}} = 40$  г/моль.

1. Чему равно  $Q$ ? (2 балла)

2. Определите отношение количества атомов гелия к количеству атомов аргона во втором сосуде  $n$ . (6 баллов)

**Всего – 8 баллов**

### Решение варианта 1

1. По первому началу термодинамики:  $Q = A + \Delta U$ , с учетом выражения работы при изобарном процессе:  $A = p(\Delta V)$ , а также используя выражение для внутренней энергии идеального одноатомного газа  $U = \frac{3}{2} \nu RT$ , получим для чистого аргона:

$$Q = p\Delta V_1 + \frac{3}{2} \nu_{1,\text{Ar}} R \Delta T_1 = \frac{5}{2} \nu_{1,\text{Ar}} R \Delta T_1 = \frac{5\Delta m}{2\mu_{\text{Ar}}} R \Delta T_1 \approx 6.7 \text{ кДж}$$

2. По аналогии с пунктом 1 выразим количество теплоты полученное смесью:

$$Q = p_2 \Delta V_2 + \frac{3}{2} (\nu_{2,\text{Ar}} + \nu_{\text{He}}) R \Delta T_2 = \frac{5}{2} (\nu_{2,\text{Ar}} + \nu_{\text{He}}) R \Delta T_2$$

Приравнявая выражения для  $Q$  из 1-ого и 2-ого пункта, получим первое уравнение, а учитывая, что массы газов в сосудах 1 и 2 одинаковы, получим второе уравнение системы.

$$\begin{aligned} \nu_{1,\text{Ar}} \Delta T_1 &= (\nu_{1,\text{Ar}} + \nu_{\text{He}}) \Delta T_2 \\ \nu_{1,\text{Ar}} \mu_{\text{Ar}} &= \nu_{2,\text{Ar}} \mu_{\text{Ar}} + \nu_{\text{He}} \mu_{\text{He}} \end{aligned}$$

Решим систему и выразим  $\nu_{2,\text{Ar}}$ ,  $\nu_{\text{He}}$ . Для их отношения  $n$  получим:

$$n = \frac{\nu_{\text{He}}}{\nu_{2,\text{Ar}}} = \frac{\mu_{\text{Ar}}(\Delta T_1 - \Delta T_2)}{\mu_{\text{Ar}} \Delta T_2 - \mu_{\text{He}} \Delta T_1} \approx 0,33$$

## Вариант 2



В микроэлектронике часто используется смесь двух благородных газов – ксенона и аргона. Однако для практического применения важно знать состав смеси. Для его определения провели следующий эксперимент. Два одинаковых цилиндрических сосуда с массивными поршнями, движущимися без трения, заполнили чистым аргоном и исследуемой смесью ксенона и аргона. В обоих случаях масса после заполнения увеличилась на  $\Delta m = 4,00$  кг. Затем каждому цилиндру изобарно сообщили одинаковое количество теплоты  $Q$ , в результате чего температура газа в первом цилиндре увеличилась на  $\Delta T_1 = 1,77^\circ\text{C}$ , а во втором – на  $\Delta T_2 = 3,00^\circ\text{C}$ . Молярные массы ксенона  $\mu_{\text{Xe}} = 131$  г/моль и аргона  $\mu_{\text{Ar}} = 40$  г/моль.

1. Рассчитайте количество теплоты  $Q$ . (2 балла)
2. Определите отношение количества атомов ксенона к количеству атомов аргона во втором сосуде  $n$ . (6 баллов)

**Всего – 8 баллов**

## Решение варианта 2

1. По первому началу термодинамики:  $Q = A + \Delta U$ , с учетом выражения работы при изобарном процессе:  $A = p(\Delta V)$ , а также используя выражение для внутренней энергии идеального одноатомного газа  $U = \frac{3}{2} \nu RT$ , получим для чистого аргона:

$$Q = p\Delta V_1 + \frac{3}{2} \nu_{1,\text{Ar}} R \Delta T_1 = \frac{5}{2} \nu_{1,\text{Ar}} R \Delta T_1 = \frac{5\Delta m}{2\mu_{\text{Ar}}} R \Delta T_1 \approx 3.7 \text{ кДж}$$

2. По аналогии с пунктом 1 выразим количество теплоты полученное смесью:

$$Q = p_2 \Delta V_2 + \frac{3}{2} (\nu_{2,\text{Ar}} + \nu_{\text{Xe}}) R \Delta T_2 = \frac{5}{2} (\nu_{2,\text{Ar}} + \nu_{\text{Xe}}) R \Delta T_2$$

Приравнявая выражения для  $Q$  из 1-ого и 2-ого пункта, получим первое уравнение, а учитывая, что массы газов в сосудах 1 и 2 одинаковы, получим второе уравнение системы.

$$\begin{aligned} \nu_{1,\text{Ar}} \Delta T_1 &= (\nu_{1,\text{Ar}} + \nu_{\text{Xe}}) \Delta T_2 \\ \nu_{1,\text{Ar}} \mu_{\text{Ar}} &= \nu_{2,\text{Ar}} \mu_{\text{Ar}} + \nu_{\text{Xe}} \mu_{\text{Xe}} \end{aligned}$$

Решим систему и выразим  $v_{2,Ar}$ ,  $v_{He}$ . Для их отношения  $n$  получим:

$$n = \frac{v_{Xe}}{v_{2,Ar}} = \frac{\mu_{Ar}(\Delta T_1 - \Delta T_2)}{\mu_{Ar}\Delta T_2 - \mu_{Xe}\Delta T_1} \approx 0,44$$

### Вариант 3



В хроматографии в качестве криогенного газа часто используется смесь двух благородных газов – криптона и аргона. Однако для практического применения важно знать состав смеси. Для его определения провели следующий эксперимент. Два одинаковых цилиндрических сосуда с массивными поршнями, движущимися без трения, заполнили чистым аргоном и исследуемой смесью криптона и аргона. В обоих случаях масса после заполнения увеличилась на  $\Delta m = 6,00$  кг. Затем каждому цилиндру изобарно сообщили одинаковое количество теплоты  $Q$ , в результате чего температура газа в первом цилиндре увеличилась на  $\Delta T_1 = 2,47^\circ\text{C}$ , а во втором – на  $\Delta T_2 = 3,50^\circ\text{C}$ . Молярные массы криптона  $\mu_{Kr} = 84$  г/моль и аргона  $\mu_{Ar} = 40$  г/моль.

1. Чему равно  $Q$ ? (2 балла)
2. Определите отношение количества атомов криптона к количеству атомов аргона во втором сосуде  $n$ . (6 баллов)

**Всего – 8 баллов**

### Решение варианта 3

1. По первому началу термодинамики:  $Q = A + \Delta U$ , с учетом выражения работы при изобарном процессе:  $A = p(\Delta V)$ , а также используя выражение для внутренней энергии идеального одноатомного газа  $U = \frac{3}{2} \nu RT$ , получим для чистого аргона:

$$Q = p\Delta V_1 + \frac{3}{2} \nu_{1,Ar} R \Delta T_1 = \frac{5}{2} \nu_{1,Ar} R \Delta T_1 = \frac{5\Delta m}{2\mu_{Ar}} R \Delta T_1 \approx 7.7 \text{ кДж}$$

2. По аналогии с пунктом 1 выразим количество теплоты полученное смесью:

$$Q = p_2 \Delta V_2 + \frac{3}{2} (\nu_{2,Ar} + \nu_{Kr}) R \Delta T_2 = \frac{5}{2} (\nu_{2,Ar} + \nu_{Kr}) R \Delta T_2$$



Приравнявая выражения для  $Q$  из 1-ого и 2-ого пункта, получим первое уравнение, а учитывая, что массы газов в сосудах 1 и 2 одинаковы, получим второе уравнение системы.

$$\begin{aligned}v_{1,Ar}\Delta T_1 &= (v_{1,Ar} + v_{Kr})\Delta T_2 \\v_{1,Ar}\mu_{Ar} &= v_{2,Ar}\mu_{Ar} + v_{Kr}\mu_{Kr}\end{aligned}$$

Решим систему и выразим  $v_{2,Ar}$ ,  $v_{He}$ . Для их отношения  $n$  получим:

$$n = \frac{v_{Kr}}{v_{2,Ar}} = \frac{\mu_{Ar}(\Delta T_1 - \Delta T_2)}{\mu_{Ar}\Delta T_2 - \mu_{Kr}\Delta T_1} \approx 0,61$$

## Вариант 4



Для подсветки изображений и вывесок часто используется смесь двух благородных газов – неона и аргона. Однако для практического применения важно знать состав смеси. Для его определения провели следующий эксперимент. Два одинаковых цилиндрических сосуда с массивными поршнями, движущимися без трения, заполнили чистым аргоном и исследуемой смесью неона и аргона. В обоих случаях масса после заполнения увеличилась на  $\Delta m = 3,00$  кг. Затем каждому цилиндру изобарно сообщили одинаковое количество теплоты, в результате чего температура газа в первом цилиндре увеличилась на  $\Delta T_1 = 2,50^\circ\text{C}$ , а во втором – на  $\Delta T_2 = 1,50^\circ\text{C}$ . Молярные массы неона  $\mu_{Ne} = 20$  г/моль и аргона  $\mu_{Ar} = 40$  г/моль.

1. Чему равно  $Q$ ? (2 балла)
2. Определите отношение количества атомов неона к количеству атомов аргона во втором сосуде  $n$ . (6 баллов)

**Всего – 8 баллов**

## Решение варианта 4

1. По первому началу термодинамики:  $Q = A + \Delta U$ , с учетом выражения работы при изобарном процессе:  $A = p(\Delta V)$ , а также используя выражение для внутренней энергии идеального одноатомного газа  $U = \frac{3}{2}\nu RT$ , получим для чистого аргона:

$$Q = p\Delta V_1 + \frac{3}{2}v_{1,Ar}R\Delta T_1 = \frac{5}{2}v_{1,Ar}R\Delta T_1 = \frac{5\Delta m}{2\mu_{Ar}}R\Delta T_1 \approx 3.9 \text{ кДж}$$

2. По аналогии с пунктом 1 выразим количество теплоты полученное смесью:

$$Q = p_2\Delta V_2 + \frac{3}{2}(v_{2,Ar} + v_{Ne})R\Delta T_2 = \frac{5}{2}(v_{2,Ar} + v_{Ne})R\Delta T_2$$

Приравнявая выражения для Q из 1-ого и 2-ого пункта, получим первое уравнение, а учитывая, что массы газов в сосудах 1 и 2 одинаковы, получим второе уравнение системы.

$$\begin{aligned} v_{1,Ar}\Delta T_1 &= (v_{1,Ar} + v_{Ne})\Delta T_2 \\ v_{1,Ar}\mu_{Ar} &= v_{2,Ar}\mu_{Ar} + v_{Ne}\mu_{Ne} \end{aligned}$$

Решим систему и выразим  $v_{2,Ar}$ ,  $v_{Ne}$ . Для их отношения n получим:

$$n = \frac{v_{Ne}}{v_{2,Ar}} = \frac{\mu_{Ar}(\Delta T_1 - \Delta T_2)}{\mu_{Ar}\Delta T_2 - \mu_{Ne}\Delta T_1} \approx 4,0$$

## Задача по физике. Отражения (8 баллов)

### Вариант 1



Зеркала входят в состав рефлекторного телескопа. Юный астроном сложил два плоских зеркала, а затем стал менять угол между плоскостями зеркал.

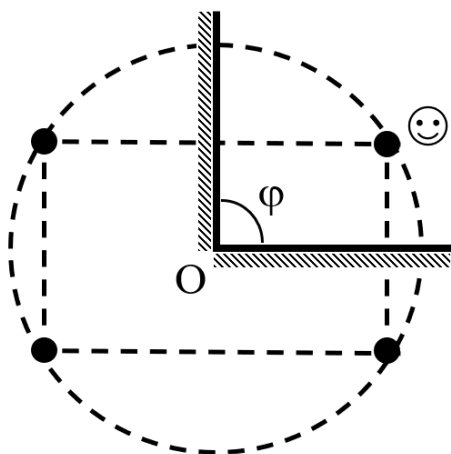
Сколько собственных изображений он увидит, когда угол между зеркальными поверхностями станет равен

а)  $\phi = \pi/2$ , (3 балла)

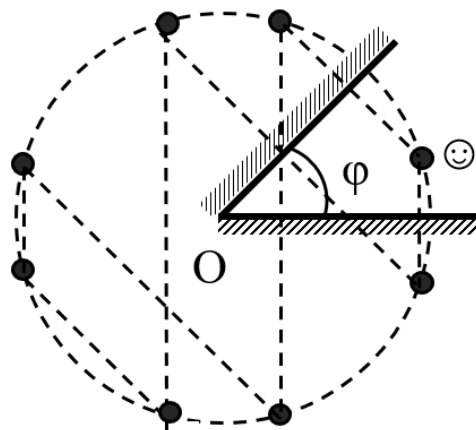
б)  $\phi = \pi/4$ . (5 баллов)

**Всего – 8 баллов**

## Решение варианта 1



а)



б)

Схема расположения юного астронома и его изображений относительно двугранного угла  $\varphi$ . а)  $\varphi = \pi/2$ , б)  $\varphi = \pi/4$ .

Зеркала плоские. Будем последовательно отражать изображение юного астронома относительно поверхностей каждого зеркала. Изображения расположатся на окружности с центром в точке О.

Ответ: Юный астроном увидит: а) 3 собственных изображения, б) 7 собственных изображений.

## Вариант 2



Юный астроном, разбираясь с принципом работы рефлекторного телескопа, сложил два плоских зеркала, а затем стал плавно изменять угол между плоскостями зеркал.

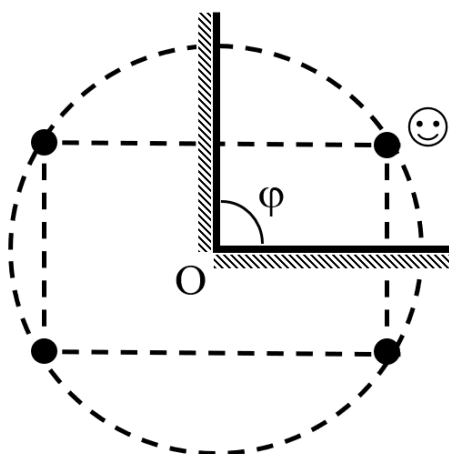
Сколько собственных изображений он увидит, когда угол между зеркалами станет равен

а)  $\varphi = \pi/2$ , (3 балла)

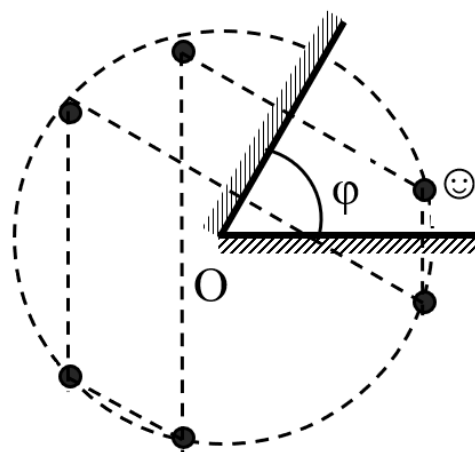
б)  $\varphi = \pi/3$ . (5 баллов)

Всего – 8 баллов

## Решение варианта 2



а)



б)

Схема расположения юного астронома и его изображений относительно двугранного угла  $\varphi$ . а)  $\varphi = \pi/2$ , б)  $\varphi = \pi/3$ .

Зеркала плоские. Будем последовательно отражать изображение юного астронома относительно поверхностей каждого зеркала. Изображения расположатся на окружности с центром в точке О.

Ответ: Юный астроном увидит: а) 3 собственных изображения, б) 5 собственных изображений.

## Вариант 3



Зеркала входят в состав рефлекторного телескопа. Юный астроном сложил два плоских зеркала, а затем стал менять угол между плоскостями зеркал.

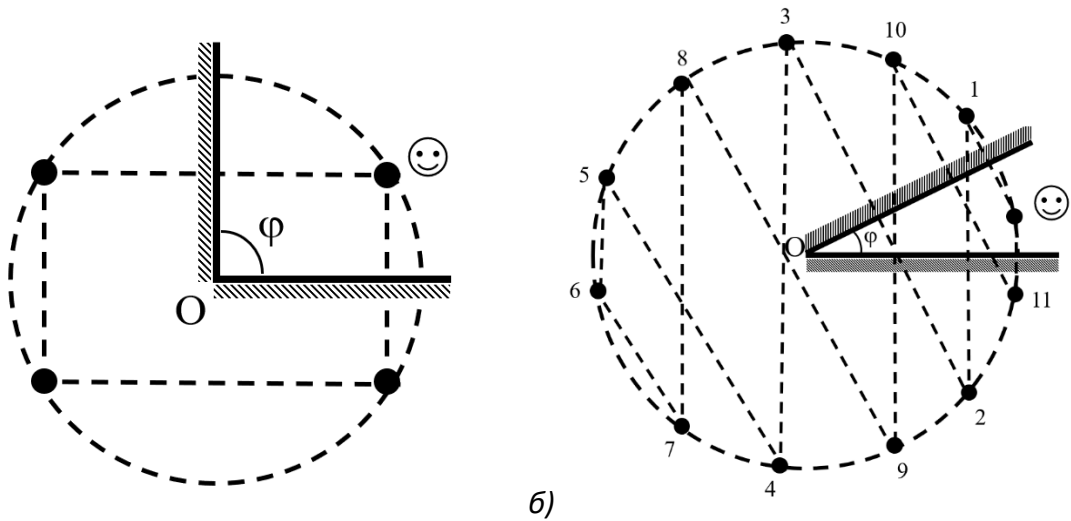
Сколько собственных изображений он увидит, когда угол между зеркальными поверхностями станет равен

а)  $\varphi = \pi/2$ , (3 балла)

б)  $\varphi = \pi/6$ . (5 баллов)

Всего – 8 баллов

## Решение варианта 3



а) б)  
Схема расположения юного астронома и его изображений относительно двугранного угла  $\varphi$ . а)  $\varphi = \pi/2$ , б)  $\varphi = \pi/6$ .

Зеркала плоские. Будем последовательно отражать изображение юного астронома относительно поверхностей каждого зеркала. Изображения расположатся на окружности с центром в точке О.

Ответ: Юный астроном увидит: а) 3 собственных изображения, б) 11 собственных изображений.

## Вариант 4



Юный астроном, разбираясь с принципом работы рефлекторного телескопа, сложил два плоских зеркала, а затем стал плавно изменять угол между плоскостями зеркал.

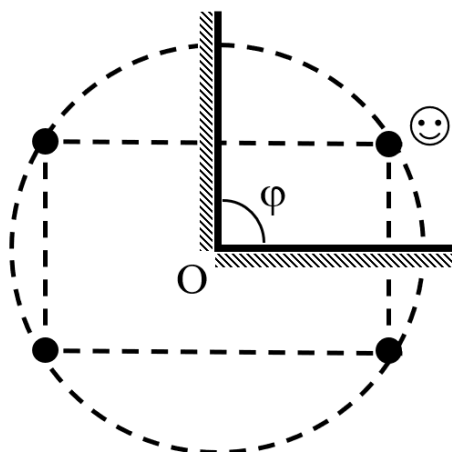
Сколько собственных изображений он увидит, когда угол между зеркалами станет равен

а)  $\varphi = \pi/2$ , (3 балла)

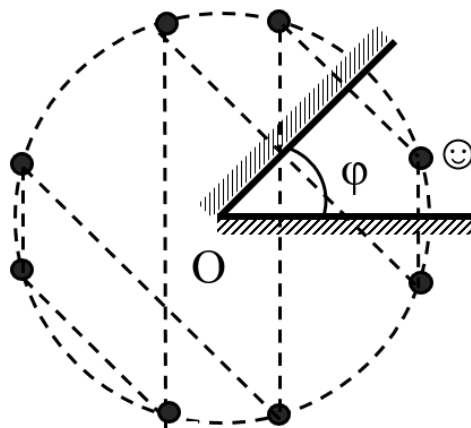
б)  $\varphi = \pi/4$ . (5 баллов)

Всего – 8 баллов

## Решение варианта 4



а)



б)

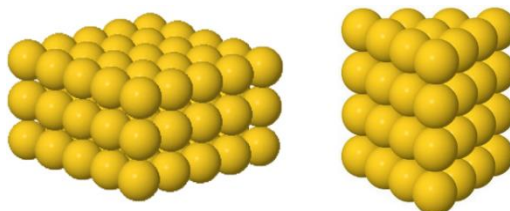
Схема расположения юного астронома и его изображений относительно двугранного угла  $\varphi$ . а)  $\varphi = \pi/2$ , б)  $\varphi = \pi/4$ .

Зеркала плоские. Будем последовательно отражать изображение юного астронома относительно поверхностей каждого зеркала. Изображения расположатся на окружности с центром в точке O.

Ответ: Юный астроном увидит: а) 3 собственных изображения, б) 7 собственных изображений.

## Задача по математике. Призмы (5 баллов)

### Вариант 1



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится  $a = 3x$  атомов металла, а на боковое ребро –  $b = x + 4$  атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится  $c = x$  атомов металла, а на боковое ребро –  $d = 27x$  атомов.

Найдите  $x$ , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.

Общее число атомов в квадратной призме:  $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме:  $T = cd(c + 1)/2$ .

Всего – 5 баллов



### Решение варианта 1

Чтобы найти  $x$ , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$

$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(3x)^2 \cdot (x + 4) = x \cdot 27x(x + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

$$9x^2(x + 4) = 27x^2(x + 1)/2$$

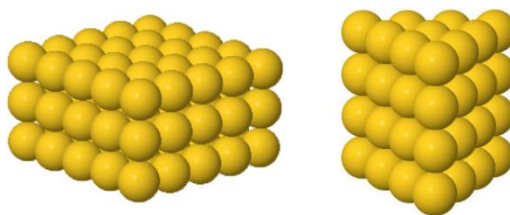
$$x + 4 = 3(x + 1)/2$$

$$2x + 8 = 3x + 3$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно  $N = (3x)^2 \cdot (x + 4) = 15^2 \cdot 9 = 2025$ .

### Вариант 2



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится  $a = 3x$  атомов металла, а на боковое ребро –  $b = x + 4$  атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится  $c = x + 4$  атомов металла, а на боковое ребро –  $d = 9x$  атомов.

**Найдите  $x$ , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.**

Общее число атомов в квадратной призме:  $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме:  $T = cd(c + 1)/2$ .

**Всего – 5 баллов**

### Решение варианта 2

Чтобы найти  $x$ , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$



$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(3x)^2 \cdot (x + 4) = (x + 4) \cdot 9x(x + 4 + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

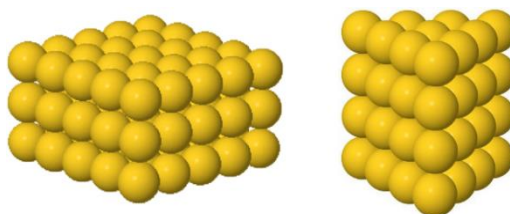
$$9x^2(x + 4) = (x + 4) \cdot 9x(x + 5)/2$$

$$x = (x + 5)/2$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно  $N = (3x)^2 \cdot (x + 4) = 15^2 \cdot 9 = 2025$ .

### Вариант 3



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится  $a = x + 4$  атомов металла, а на боковое ребро –  $b = 5x$  атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится  $c = x + 4$  атомов металла, а на боковое ребро –  $d = 9x$  атомов.

**Найдите  $x$ , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.**

Общее число атомов в квадратной призме:  $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме:  $T = cd(c + 1)/2$ .

**Всего – 5 баллов**

### Решение варианта 3

Чтобы найти  $x$ , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$

$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(x + 4)^2 \cdot 5x = (x + 4) \cdot 9x(x + 4 + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

$$(x + 4)^2 \cdot 5x = (x + 4) \cdot 9x(x + 5)/2$$



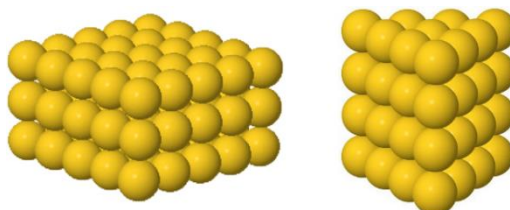
$$(x + 4) \cdot 5 = 9(x + 5)/2$$

$$10x + 40 = 9x + 45$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно  $N = (x + 4)^2 \cdot 5x = 9^2 \cdot 25 = 2025$ .

#### **Вариант 4**



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится  $a = x + 4$  атомов металла, а на боковое ребро –  $b = 5x$  атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится  $c = x$  атомов металла, а на боковое ребро –  $d = 15(x + 4)$  атомов.

**Найдите  $x$ , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.**

Общее число атомов в квадратной призме:  $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме:  $T = cd(c + 1)/2$ .

**Всего – 5 баллов**

#### **Решение варианта 4**

Чтобы найти  $x$ , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$

$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(x + 4)^2 \cdot 5x = x \cdot 15(x + 4)(x + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

$$x + 4 = 3(x + 1)/2$$

$$2x + 8 = 3x + 3$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно  $N = (x + 4)^2 \cdot 5x = 9^2 \cdot 25 = 2025$ .

**Задача по математике. Сушка гидрогеля (8 баллов)****Вариант 1**

Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 98% после частичной сушки содержит 96% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в см<sup>3</sup>), если его плотность составляет  $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$ ? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды  $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$ ? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

**Всего – 8 баллов**

**Решение варианта 1**

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:

$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1(1 - \omega_1/100\%)/(1 - \omega_2/100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 98\%/100\%)/(1 - 96\%/100\%) = 10 \cdot 0,02/0,04 = 5 \text{ грамм}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в  $10/5 = 2$  раза.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 98\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,2 / 1,4 = 0,14 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1 (1 / \rho_r + \omega_1 / 100\% (1 / \rho_B - 1 / \rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1 (\rho_B + \omega_1 / 100\% (\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1 + 98\% / 100\% (1,4 - 1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1 + 0,98 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,94 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10 / 9,94 = 1,006 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_r = 9,94 / 0,14 = 71$  раз.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_2 = m_1 / m_2 = 2$  раза)

**Вариант 2**

Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 98% после частичной сушки содержит 92% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в  $\text{см}^3$ ), если его плотность составляет  $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$ ? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды  $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$ ? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

**Всего – 8 баллов**

**Решение варианта 2**

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:



$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1(1 - \omega_1/100\%)/(1 - \omega_2/100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 98\%/100\%)/(1 - 92\%/100\%) = 10 \cdot 0,02/0,08 = 2,5 \text{ грамма}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в  $10/2,5 = 4$  раза.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 98\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,2 / 1,4 = 0,14 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1 (1 / \rho_r + \omega_1 / 100\% (1 / \rho_B - 1 / \rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1 (\rho_B + \omega_1 / 100\% (\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1 + 98\% / 100\% (1,4 - 1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1 + 0,98 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,94 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10 / 9,94 = 1,006 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_r = 9,94 / 0,14 = 71$  раз.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_2 = m_1 / m_2 = 4$  раза)

**Вариант 3**

Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 96% после частичной сушки содержит 92% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в  $\text{см}^3$ ), если его плотность составляет  $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$ ? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды  $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$ ? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

**Всего – 8 баллов**

**Решение варианта 3**

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:

$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1 (1 - \omega_1 / 100\%) / (1 - \omega_2 / 100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 96\% / 100\%) / (1 - 92\% / 100\%) = 10 \cdot 0,04 / 0,08 = 5 \text{ грамм}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в  $10/5 = 2$  раза.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 96\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,4 / 1,4 = 0,29 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1 (1 / \rho_r + \omega_1 / 100\% (1 / \rho_B - 1 / \rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1 (\rho_B + \omega_1 / 100\% (\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1 + 96\% / 100\% (1,4 - 1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1 + 0,96 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,89 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10 / 9,89 = 1,011 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_r = 9,89 / 0,14 = 34,3$  раза.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_2 = m_1 / m_2 = 2$  раза)

**Вариант 4**

Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 98% после частичной сушки содержит 90% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в  $\text{см}^3$ ), если его плотность составляет  $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$ ? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды  $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$ ? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

**Всего – 8 баллов**

**Решение варианта 4**

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:



$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1 (1 - \omega_1 / 100\%) / (1 - \omega_2 / 100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 98\% / 100\%) / (1 - 90\% / 100\%) = 10 \cdot 0,02 / 0,10 = 2 \text{ грамма}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в  $10/2 = 5$  раз.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 98\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,2 / 1,4 = 0,14 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1 (1 / \rho_r + \omega_1 / 100\% (1 / \rho_B - 1 / \rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1 (\rho_B + \omega_1 / 100\% (\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1 + 98\% / 100\% (1,4 - 1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1 + 0,98 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,94 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10 / 9,94 = 1,006 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_r = 9,94 / 0,14 = 71$  раз.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в  $V_1 / V_2 = m_1 / m_2 = 5$  раз)

## Задача по математике. Математика диатомовых водорослей (12 баллов)

### Вариант 1

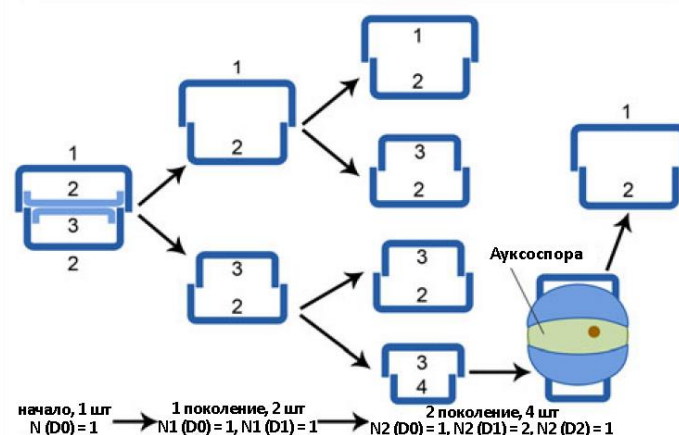


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия аукоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь  $D_i$  – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию аукоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера  $D_0$ . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 11 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию аукоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через аукоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей  $D_0 = 50$  мкм и средний размер  $D = 43$  мкм. После какого поколения впервые произошло образование аукоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром  $D_0$  мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на  $d = 1$  мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

**Всего – 12 баллов**

## Решение варианта 1

1. Обозначим как  $D_n$  минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половины панциря), впервые возникающий в поколении  $n$ , а  $D_0$  – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии аукоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении  $m$  самая маленькая диатомея проходит через стадию аукоспоры, то

сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии аукоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$N'_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$m+1: N_{m+1}(D_0) = N'_m(D_0),$$

$$N_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_{m-1})$$

после аукоспоры в  $m+1$ :

$$N'_{m+1}(D_0) = N_{m+1}(D_0) + N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_0) + N'_m(D_{m-1}),$$

$$N'_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного  $k > m$  (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению,  $k-1$ ):

$$k: N_k(D_0) = N'_{k-1}(D_0),$$

$$N_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_{m-1})$$

после ауксоспоры в  $k$ :

$$N'_k(D_0) = N_k(D_0) + N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_0) + N'_{k-1}(D_{m-1}),$$

$$N'_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения  $N$  для  $m = 4$  (для  $n \geq m$  сразу приведены значения  $N'$ , число клеток, пошедших стадию ауксоспоры указано в скобках):

$n$	$N_n(D_0)$	$N_n(D_1)$	$N_n(D_2)$	$N_n(D_3)$	$N_n(D_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)
13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для  $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для  $n = 11$

$$N_{11}(D_0) = 256 + 240 = 496, N_{11}(D_1) = 528, N_{11}(D_2) = 528, N_{11}(D_3) = 496, (N_{11}(D_4) = 240).$$

- Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом  $d$ :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d \frac{(m-1)}{2}$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(50 - 43)/1 + 1 = 15.$$

## Вариант 2

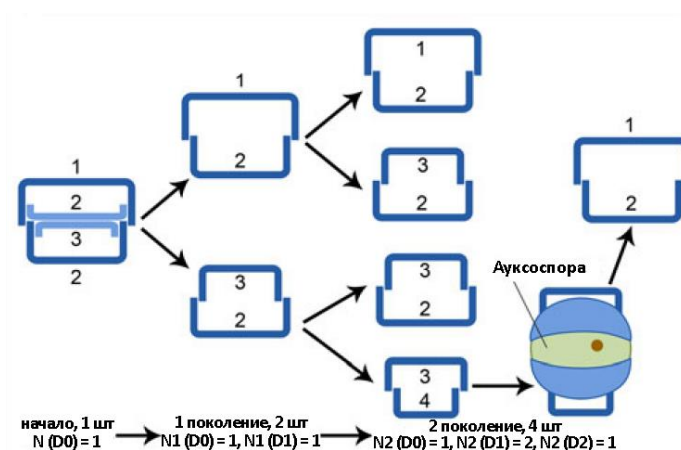


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия ауксоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь  $D_i$  – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию ауксоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера  $D_0$ . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 11 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию ауксоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через ауксоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей  $D_0 = 60$  мкм и средний размер  $D = 53$  мкм. После какого поколения впервые произошло образование ауксоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром  $D_0$  мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на  $d = 1$  мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

**Всего – 12 баллов**

## Решение варианта 2

1. Обозначим как  $D_n$  минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половинки панциря), впервые возникающий в поколении  $n$ , а  $D_0$  – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии ауксоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении  $m$  самая маленькая диатомея проходит через стадию ауксоспоры, то

сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии ауксоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$\mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$m+1: \mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_0),$$

$$\mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$\mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{m-1})$$

после аукоспоры в  $m+1$ :

$$\mathbf{N}'_{m+1}(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{m-1}),$$

$$\mathbf{N}'_{m+1}(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного  $k > m$  (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению,  $k-1$ ):

$$k: \mathbf{N}_k(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_0),$$

$$\mathbf{N}_k(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$\mathbf{N}_k(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{m-1})$$

после аукоспоры в  $k$ :

$$\mathbf{N}'_k(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}_k(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}_k(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{m-1}),$$

$$\mathbf{N}'_k(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения  $\mathbf{N}$  для  $m = 4$  (для  $n \geq m$  сразу приведены значения  $\mathbf{N}'$ , число клеток, пошедших стадию аукоспоры указано в скобках):

$n$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_0)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_1)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_2)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_3)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)

13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для  $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для  $n = 11$

$$N_{11}(D_0) = 256 + 240 = 496, N_{11}(D_1) = 528, N_{11}(D_2) = 528, N_{11}(D_3) = 496, (N_{11}(D_4) = 240).$$

2. Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом  $d$ :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d(m-1)/2$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(60 - 53)/1 + 1 = 15.$$



## Вариант 3

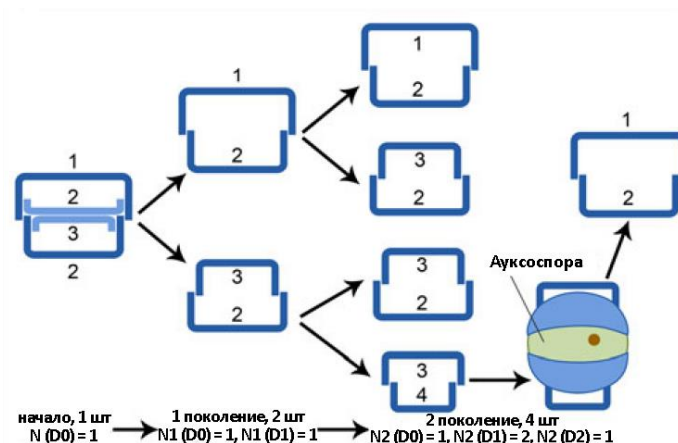


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия ауксоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь  $D_i$  – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию ауксоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера  $D_0$ . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 12 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию ауксоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через ауккоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей  $D_0 = 50$  мкм и средний размер  $D = 39$  мкм. После какого поколения впервые произошло образование ауккоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром  $D_0$  мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на  $d = 1$  мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

Всего – 12 баллов

### Решение варианта 3

1. Обозначим как  $D_n$  минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половины панциря), впервые возникающий в поколении  $n$ , а  $D_0$  – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии аукоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении  $m$  самая маленькая диатомея проходит через стадию аукоспоры, то сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии аукоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$N'_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$m+1: N_{m+1}(D_0) = N'_m(D_0),$$

$$N_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_{m-1})$$

после аукоспоры в  $m+1$ :

$$N'_{m+1}(D_0) = N_{m+1}(D_0) + N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_0) + N'_m(D_{m-1}),$$

$$N'_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного  $k > m$  (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению,  $k-1$ ):

$$k: N_k(D_0) = N'_{k-1}(D_0),$$

$$N_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_{m-1})$$

после ауксоспоры в  $k$ :

$$N'_k(D_0) = N_k(D_0) + N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_0) + N'_{k-1}(D_{m-1}),$$

$$N'_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения  $N$  для  $m = 4$  (для  $n \geq m$  сразу приведены значения  $N'$ , число клеток, пошедших стадию ауксоспоры указано в скобках):

$n$	$N_n(D_0)$	$N_n(D_1)$	$N_n(D_2)$	$N_n(D_3)$	$N_n(D_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)
13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для  $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для  $n = 12$

$$N_{12}(D_0) = 496 + 496 = 992, N_{12}(D_1) = 1024, N_{12}(D_2) = 1056, N_{12}(D_3) = 1024, (N_{12}(D_4) = 496).$$

2. Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом  $d$ :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d \frac{(m-1)}{2}$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(50 - 39)/1 + 1 = 23.$$

## Вариант 4

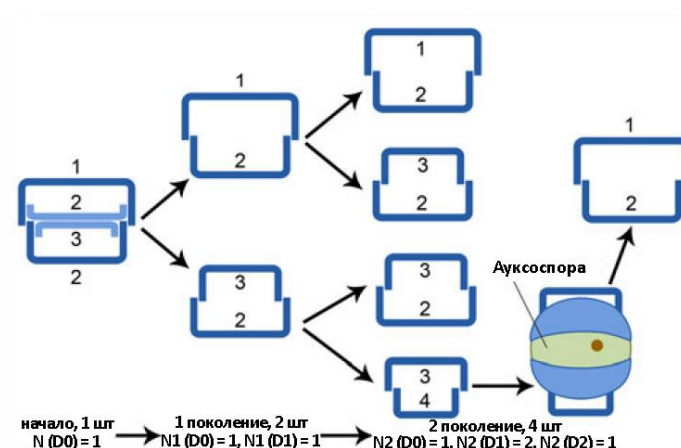


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия ауксоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь  $D_i$  – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию ауксоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера  $D_0$ . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 12 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию ауксоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через ауксоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей  $D_0 = 60$  мкм и средний размер  $D = 49$  мкм. После какого поколения впервые произошло образование ауксоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром  $D_0$  мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на  $d = 1$  мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

**Всего – 12 баллов**

#### **Решение варианта 4**

1. Обозначим как  $D_n$  минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половинки панциря), впервые возникающий в поколении  $n$ , а  $D_0$  – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии ауксоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении  $m$  самая маленькая диатомея проходит через стадию ауксоспоры, то

сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии ауксоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$\mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_i) = C_m^i (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$\mathbf{m} + 1: \mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_0),$$

$$\mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_i) (1 \leq i \leq m-1),$$

$$\mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{m-1})$$

после аукоспоры в  $\mathbf{m} + 1$ :

$$\mathbf{N}'_{m+1}(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}_{m+1}(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{m-1}),$$

$$\mathbf{N}'_{m+1}(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_m(\mathbf{D}_i) (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного  $\mathbf{k} > \mathbf{m}$  (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению,  $\mathbf{k} - 1$ ):

$$\mathbf{k}: \mathbf{N}_k(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_0),$$

$$\mathbf{N}_k(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_i) (1 \leq i \leq m-1),$$

$$\mathbf{N}_k(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{m-1})$$

после аукоспоры в  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{N}'_k(\mathbf{D}_0) = \mathbf{N}_k(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}_k(\mathbf{D}_m) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_0) + \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{m-1}),$$

$$\mathbf{N}'_k(\mathbf{D}_i) = \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_{i-1}) + \mathbf{N}'_{k-1}(\mathbf{D}_i) (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения  $\mathbf{N}$  для  $\mathbf{m} = 4$  (для  $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$  сразу приведены значения  $\mathbf{N}'$ , число клеток, пошедших стадию аукоспоры указано в скобках):

$\mathbf{n}$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_0)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_1)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_2)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_3)$	$\mathbf{N}_n(\mathbf{D}_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)

13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для  $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для  $n = 12$

$$N_{12}(D_0) = 496 + 496 = 992, N_{12}(D_1) = 1024, N_{12}(D_2) = 1056, N_{12}(D_3) = 1024, (N_{12}(D_4) = 496).$$

2. Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом  $d$ :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d(m-1)/2$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(60 - 49)/1 + 1 = 23.$$

**Задача по биологии. Напечатайте мне сердце! (5 баллов)****Вариант 1**

- Напечатайте мне сердце! — так, наверное, мог бы сказать Железный Дровосек, если бы обратился не к волшебнику Гудвину, а в современный центр имплантации. А Страшила попросил бы напечатать мозги. Действительно, методы биопринтинга позволяют воссоздать трехмерную структуру органа при помощи 3D-принтера. Однако, для этого нужно знать не только трехмерную структуру органа, состав и структуру внеклеточного матрикса, но и понимать, какие именно клетки подходят для того, чтобы использовать такую технологию.

Выберите правильные варианты ответа и объясните свой выбор.

1. **Какие клетки человеческого организма не являются специализированными и могут при специальном воздействии развиваться в клетки любого или почти любого типа?**
  - а. Нейроны.
  - б. Иммунные клетки.
  - в. Раковые клетки.
  - г. Стволовые клетки.
  - д. Половые клетки.
2. **У каких клеток нет ядра и митохондрий?**
  - а. Нейроны.
  - б. Раковые клетки.
  - в. Эритроциты.
  - г. Дендритные клетки.
  - д. Половые клетки.

***Всего – 5 баллов, по 2 балла за правильный ответ и 1 балл за объяснения.***

**Решение варианта 1**

1. г — стволовые клетки, т.к. это неспециализированные клетки, сохраняющие возможность дифференцироваться в другие типы клеток
2. в — эритроциты. Ядро у зрелых эритроцитов удаляется в процессе их развития.



**Вариант 2**

- Напечатайте мне сердце! — так, наверное, мог бы сказать Железный Дровосек, если бы обратился не к волшебнику Гудвину, а в современный центр имплантации. А Страшила попросил бы напечатать мозги. Действительно, методы биопринтинга позволяют воссоздать трехмерную структуру органа при помощи 3D-принтера. Однако, для этого нужно знать не только трехмерную структуру органа, состав и структуру внеклеточного матрикса, но и понимать, какие именно клетки подходят для того, чтобы использовать такую технологию.

Выберите правильные варианты ответа и объясните свой выбор.

1. **В каких тканях и органах взрослого человека обнаруживаются клетки, которые не являются специализированными и могут при специальном воздействии развиваться в клетки любого или почти любого типа?**
  - а. Головной мозг.
  - б. Система кроветворения.
  - в. Выделительная система.
  - г. Кожа и другие покровные ткани.
2. **Какие клетки организма отличаются от своих специализированных предшественников по морфологии и функции и могут неконтролируемо делиться, вызывая заболевания?**
  - а. Нейроны.
  - б. Иммунные клетки.
  - в. Раковые клетки.
  - г. Стволовые клетки.
  - д. Половые клетки.
  - е. Эпителиальные клетки.

***Всего – 5 баллов, по 2 балла за правильный ответ и 1 балл за объяснения.***

**Решение варианта 2**

1. а, б и г – головной мозг, система кроветворения, кожа и другие покровные ткани. В системе кроветворения это стволовые клетки, из которых развиваются различные клетки крови. Стволовые клетки есть и в головном мозге, из них развиваются нейроны и клетки глии.
2. в – раковые клетки. В результате изменений генетической программы они приобретают способность к неконтролируемому делению и интенсивному росту.

**Вариант 3**

- Напечатайте мне сердце! — так, наверное, мог бы сказать Железный Дровосек, если бы обратился не к волшебнику Гудвину, а в современный центр имплантации. А Страшила попросил бы напечатать мозги. Действительно, методы биопринтинга позволяют воссоздать трехмерную структуру органа при помощи 3D-принтера. Однако, для этого нужно знать не только трехмерную структуру органа, состав и структуру внеклеточного матрикса, но и понимать, какие именно клетки подходят для того, чтобы использовать такую технологию.

Выберите правильные варианты ответа и объясните свой выбор.

1. **Как вы думаете, какие клетки лучше всего подойдут для того, чтобы вырастить из них сердце?**
  - а. Нейроны.
  - б. Иммунные клетки.
  - в. Раковые клетки.
  - г. Стволовые клетки.
  - д. Половые клетки.
2. **Какие клетки отслеживают и удаляют клетки с нарушенной функцией и неограниченным делением?**
  - а. Иммунные клетки.
  - б. Эритроциты.
  - в. Кератиноциты.
  - г. Эпителиальные клетки.
  - д. Половые клетки.

***Всего – 5 баллов, по 2 балла за правильный ответ и 1 балл за объяснения.***

**Решение варианта 3**

1. г – стволовые клетки. Из специализированных клеток почти невозможно вырастить клетки другого типа. А неспециализированные клетки-предшественники при помощи специальных воздействий можно направить на почти любой путь развития.
2. а – иммунные клетки. Они распознают белки-маркеры на поверхности опухолевых клеток и убивают их, препятствуя развитию опухоли.

**Вариант 4**

- Напечатайте мне сердце! — так, наверное, мог бы сказать Железный Дровосек, если бы обратился не к волшебнику Гудвину, а в современный центр имплантации. А Страшила попросил бы напечатать мозги. Действительно, методы биопринтинга позволяют воссоздать трехмерную структуру органа при помощи 3D-принтера. Однако, для этого нужно знать не только трехмерную структуру органа, состав и структуру внеклеточного матрикса, но и понимать, какие именно клетки подходят для того, чтобы использовать такую технологию.

Выберите правильные варианты ответа и объясните свой выбор.

**1. Какие клетки совершенно точно не способны к делению?**

- а. Нейроны.
- б. Эритроциты.
- в. Эпителиальные клетки.
- г. Глиальные клетки.

**2. Что может привести к переходу некоторых специализированных клеток к потере морфологии и функции и переходу к неконтролируемому делению?**

- а. Синтез АТФ в митохондриях.
- б. Некоторые вирусы.
- в. Нарушение межклеточных взаимодействий.
- г. Действие онкогенных химических веществ.

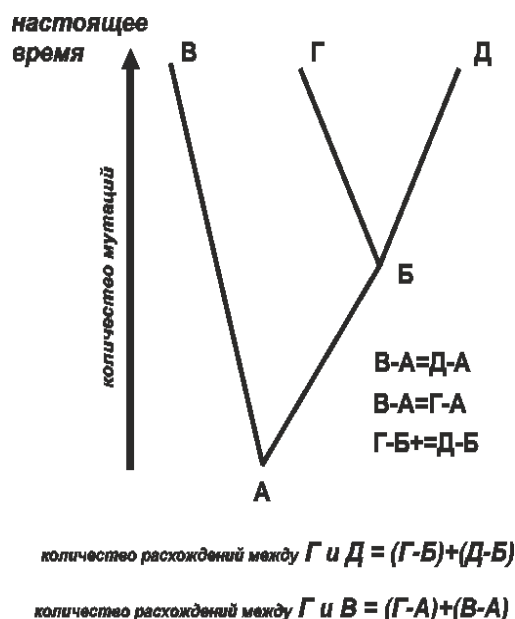
***Всего – 5 баллов, по 2 балла за правильный ответ и 1 балл за объяснения.***

**Решение варианта 4**

- 1. а – нейроны и б – эритроциты. Эритроциты не имеют ядра и не могут делиться.
- 2. б – некоторые вирусы; в – нарушение межклеточных взаимодействий; г – действие онкогенных химических веществ. Переход к неконтролируемому делению и трансформация клеток в онкогенные может происходить при различных повреждающих воздействиях. Синтез АТФ в митохондриях — это нормальный процесс, и к повреждающим воздействиям не относится.

## Задача по биологии. Молекулярные часы (10 баллов)

### Вариант 1



Молекулярные часы – метод датирования расхождений видов или других таксонов во времени, основанный на гипотезе, согласно которой скорость накопления нейтральных генетических мутаций (замены нуклеотидов в молекулах ДНК и РНК) постоянна, то есть время, прошедшее с момента расхождения пары родственных групп, пропорционально числу молекулярных замен.

Метод имеет ряд ограничений, особенно при его использовании на больших временах от расхождения между группами и оценкой неродственных таксонов, поскольку: 1) скорость мутагенеза зависит от большого числа дополнительных условий и может быть различен у разных групп; 2) часто необходимо использовать дополнительные палеонтологические, археологические и иные данные для уточнения датировок.

Тем не менее, в настоящий момент метод молекулярных часов не имеет альтернативы.

При этом предполагается, что скорости накопления нейтральных мутаций в популяции и в отдельной особи одинаковы. Накопления мутаций в процессе деления групп аддитивны, то есть если исходная группа А (см. рисунок) разделилась на две (Б и В), а одна из этих групп еще раз разделилась (на группы Г и Д), то в идеальных условиях к настоящему времени количества накопленных нейтральных мутаций (за время деления) в группах В и Д должны совпадать, так же как и в группах В и Г. При этом различие между группами соответствует сумме накопленных мутаций от момента деления исходной группы (различие между группами Д и В составляет сумму мутаций, накопленных Д и В с момента деления группы А, причем общее количество накопленных мутаций в группе Д равно сумме мутаций, накопленных в группе Б с момента отделения от А, и количеству мутаций в группе Д, накопленных после отделения от Б). Скорость накопления мутаций (скорость мутагенеза),  $v$ , определяется как количество нейтральных расхождений,  $N$ , деленное на удвоенное (мутации независимо накапливались в двух группах) время,  $t$ , прошедшее после расхождения (часто определяется в прошедших поколениях):

$$v = N / 2t$$

Оцените скорость мутагенеза, если с момента разделения двух популяций, согласно независимым источникам, прошло 350 лет. Различие в геноме двух популяций составило 4200 нуклеотидных пар. Считаем, что в геноме 2 500 000 000 пар оснований. Считаем, что на накопление мутаций ничего не влияло, а мутации появлялись случайно.

Ответ дайте в количестве мутаций на  $10^8$  пар нуклеотидных оснований в поколение (один из общепринятых способов отображать результаты). Длительность поколения принимаем за 5 лет.

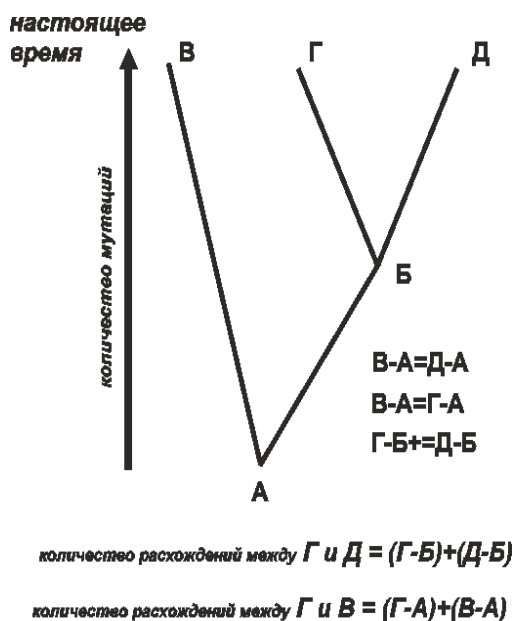
**Всего – 10 баллов**

## Решение варианта 1

1,2

Вариант расчета. За время разделения прошло  $(350/5)$  70 поколений. Это значит, что в течение поколения наблюдалось  $(4200/(2 \times 70))$  30 мутаций. То есть скорость будет 30 мутаций на геном ( $2,5 \times 10^9$  пар оснований), тогда искомый ответ будет  $(30 \times (1 \times 10^8 / 2,5 \times 10^9))$  1,2 мутации на  $10^8$  нуклеотидных пар.

## Вариант 2



Молекулярные часы – метод датирования расхождений видов или других таксонов во времени, основанный на гипотезе, согласно которой скорость накопления нейтральных генетических мутаций (замены нуклеотидов в молекулах ДНК и РНК) постоянна, то есть время, прошедшее с момента расхождения пары родственных групп, пропорционально числу молекулярных замен.

Метод имеет ряд ограничений, особенно при его использовании на больших временах от расхождения между группами и оценкой неродственных таксонов, поскольку: 1) скорость мутагенеза зависит от большого числа дополнительных условий и может быть различен у

разных групп; 2) часто необходимо использовать дополнительные палеонтологические, археологические и иные данные для уточнения датировок.

Тем не менее, в настоящий момент метод молекулярных часов не имеет альтернативы.

При этом предполагается, что скорости накопления нейтральных мутаций в популяции и в отдельной особи одинаковы. Накопления мутаций в процессе разделения групп аддитивны, то есть если исходная группа А (см. рисунок) разделилась на две (Б и В), а одна из этих групп еще раз разделилась (на группы Г и Д), то в идеальных условиях к настоящему времени количества накопленных нейтральных мутаций (за время разделения) в группах В и Д должны совпадать, так же как и в группах В и Г. При этом различие между группами соответствует сумме накопленных мутаций от момента разделения исходной группы (различие между группами Д и В составляет сумму мутаций, накопленных Д и В с момента разделения группы А, причем общее количество накопленных мутаций в группе Д равно сумме мутаций, накопленных в группе Б с момента отделения от А, и количеству мутаций в группе Д, накопленных после отделения от Б). Скорость накопления мутаций (скорость мутагенеза),  $v$ , определяется как количество нейтральных расхождений,  $N$ , деленное на удвоенное (мутации независимо накапливались в двух группах) время,  $t$ , прошедшее после расхождения (часто определяется в прошедших поколениях):

$$v=N/2t$$

**Оцените скорость мутагенеза, если с момента разделения двух популяций, согласно независимым источникам, прошло 420 лет. Различие в геноме двух популяций составило 5880 нуклеотидных пар. Считаем, что в геноме 2 500 000 000 пар оснований. Считаем, что на накопление мутаций ничего не влияло, а мутации появлялись случайно.**

Ответ дайте в количестве мутаций на  $10^8$  пар нуклеотидных оснований в поколение (один из общепринятых способов отображать результаты). Длительность поколения принимаем за 5 лет.

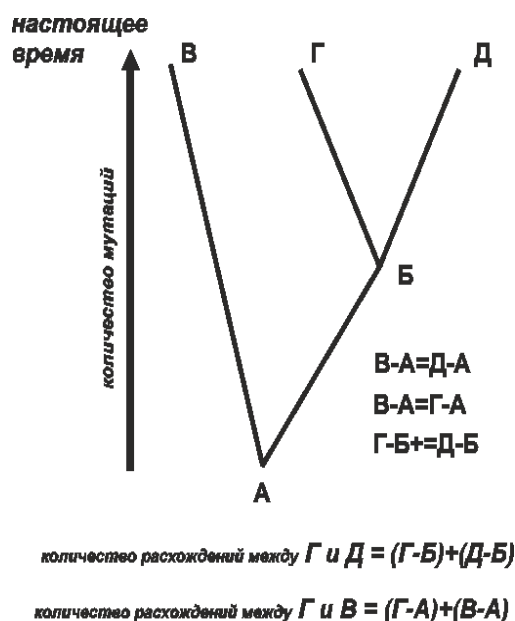
**Всего – 10 баллов**

## **Решение варианта 2**

1,4

Вариант расчета. За время разделения прошло  $(420/5)$  84 поколения. Это значит, что в течение поколения наблюдалось  $(5880/(2 \times 84))$  35 мутаций. То есть скорость будет 35 мутаций на геном ( $2,5 \times 10^9$  пар оснований), тогда искомый ответ будет  $(35 \times (1 \times 10^8 / 2,5 \times 10^9))$  1,4 мутации на  $10^8$  нуклеотидных пар.

## Вариант 3



Молекулярные часы – метод датирования расхождений видов или других таксонов во времени, основанный на гипотезе, согласно которой скорость накопления нейтральных генетических мутаций (замены нуклеотидов в молекулах ДНК и РНК) постоянна, то есть время, прошедшее с момента расхождения пары родственных групп, пропорционально числу молекулярных замен.

Метод имеет ряд ограничений, особенно при его использовании на больших временах от расхождения между группами и оценкой неродственных таксонов, поскольку: 1) скорость мутагенеза зависит от большого числа дополнительных условий и может быть различен у разных групп; 2) часто необходимо использовать дополнительные палеонтологические, археологические и иные данные для уточнения датировок.

Тем не менее, в настоящий момент метод молекулярных часов не имеет альтернативы.

При этом предполагается, что скорости накопления нейтральных мутаций в популяции и в отдельной особи одинаковы. Накопления мутаций в процессе разделения групп аддитивны, то есть если исходная группа А (см. рисунок) разделилась на две (Б и В), а одна из этих групп еще раз разделилась (на группы Г и Д), то в идеальных условиях к настоящему времени количества накопленных нейтральных мутаций (за время разделения) в группах В и Д должны совпадать, так же как и в группах В и Г. При этом различие между группами соответствует сумме накопленных мутаций от момента разделения исходной группы (различие между группами Д и В составляет сумму мутаций, накопленных Д и В с момента разделения группы А, причем общее количество накопленных мутаций в группе Д равно сумме мутаций, накопленных в группе Б с момента отделения от А, и количеству мутаций в группе Д, накопленных после отделения от Б). Скорость накопления мутаций (скорость мутагенеза),  $v$ , определяется как количество нейтральных расхождений,  $N$ , деленное на удвоенное (мутации независимо накапливались в двух группах) время,  $t$ , прошедшее после расхождения (часто определяется в прошедших поколениях):

$$v = N / 2t$$

Оцените скорость мутагенеза, если с момента разделения двух популяций, согласно независимым источникам, прошло 400 лет. Различие в геноме двух популяций составило

6400 нуклеотидных пар. Считаем, что в геноме 2 500 000 000 пар оснований. Считаем, что на накопление мутаций ничего не влияло, а мутации появлялись случайно.

Ответ дайте в количестве мутаций на  $10^8$  пар нуклеотидных оснований в поколение (один из общепринятых способов отображать результаты). Длительность поколения принимаем за 5 лет.

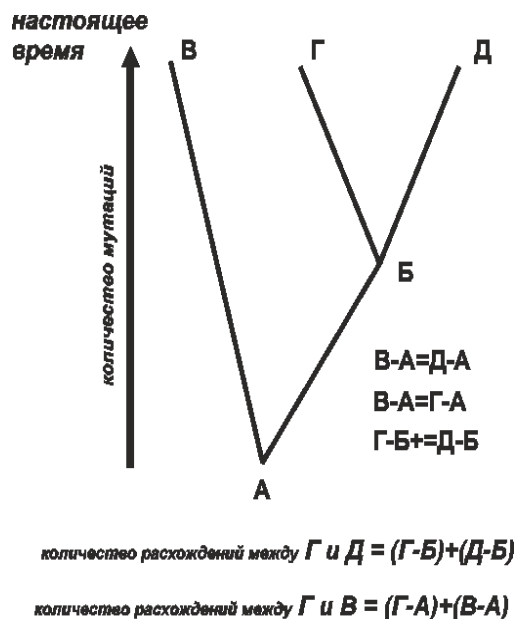
**Всего – 10 баллов**

### Решение варианта 3

1,6

Вариант расчета. За время разделения прошло  $(400/5)$  80 поколения. Это значит, что в течение поколения наблюдалось  $(6400/(2 \times 80))$  40 мутаций. То есть скорость будет 40 мутаций на геном ( $2,5 \times 10^9$  пар оснований), тогда искомый ответ будет  $(40 \times (1 \times 10^8 / 2,5 \times 10^9))$  1,6 мутации на  $10^8$  нуклеотидных пар.

### Вариант 4



Молекулярные часы – метод датирования расхождений видов или других таксонов во времени, основанный на гипотезе, согласно которой скорость накопления нейтральных генетических мутаций (замены нуклеотидов в молекулах ДНК и РНК) постоянна, то есть время, прошедшее с момента расхождения пары родственных групп, пропорционально числу молекулярных замен.

Метод имеет ряд ограничений, особенно при его использовании на больших временах от расхождения между группами и оценкой неродственных таксонов, поскольку: 1) скорость мутагенеза зависит от большого числа дополнительных условий и может быть различен у разных групп; 2) часто необходимо использовать дополнительные палеонтологические, археологические и иные данные для уточнения датировок.



Тем не менее, в настоящий момент метод молекулярных часов не имеет альтернативы.

При этом предполагается, что скорости накопления нейтральных мутаций в популяции и в отдельной особи одинаковы. Накопления мутаций в процессе разделения групп аддитивны, то есть если исходная группа А (см. рисунок) разделилась на две (Б и В), а одна из этих групп еще раз разделилась (на группы Г и Д), то в идеальных условиях к настоящему времени количества накопленных нейтральных мутаций (за время разделения) в группах В и Д должны совпадать, так же как и в группах В и Г. При этом различие между группами соответствует сумме накопленных мутаций от момента разделения исходной группы (различие между группами Д и В составляет сумму мутаций, накопленных Д и В с момента разделения группы А, причем общее количество накопленных мутаций в группе Д равно сумме мутаций, накопленных в группе Б с момента отделения от А, и количеству мутаций в группе Д, накопленных после отделения от Б). Скорость накопления мутаций (скорость мутагенеза),  $v$ , определяется как количество нейтральных расхождений,  $N$ , деленное на удвоенное (мутации независимо накапливались в двух группах) время,  $t$ , прошедшее после расхождения (часто определяется в прошедших поколениях):

$$v=N/2t$$

**Оцените скорость мутагенеза, если с момента разделения двух популяций, согласно независимым источникам, прошло 325 лет. Различие в геноме двух популяций составило 3250 нуклеотидных пар. Считаем, что в геноме 2 500 000 000 пар оснований. Считаем, что на накопление мутаций ничего не влияло, а мутации появлялись случайно.**

Ответ дайте в количестве мутаций на  $10^8$  пар нуклеотидных оснований в поколение (один из общепринятых способов отображать результаты). Длительность поколения принимаем за 5 лет.

**Всего – 10 баллов**

#### **Решение варианта 4**

1,0

Вариант расчета. За время разделения прошло  $(325/5)$  65 поколений. Это значит, что в течение поколения наблюдалось  $(3250/(2 \times 65))$  25 мутаций. То есть скорость будет 25 мутаций на геном ( $2,5 \times 10^9$  пар оснований), тогда искомый ответ будет  $(25 \times (1 \times 10^8 / 2,5 \times 10^9))$  1,0 мутаций на  $10^8$  нуклеотидных пар.

## Задача по биологии. Небеззащитные растения (10 баллов)

### Вариант 1



**рисунок 1**



**рисунок 2**



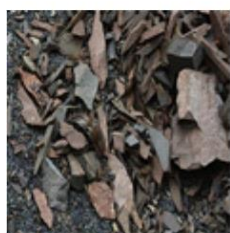
**рисунок 3**



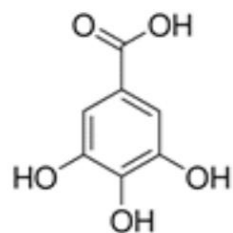
**рисунок 4**



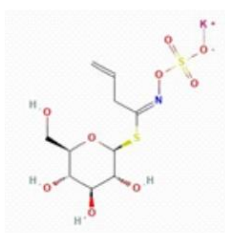
**рисунок 5**



**рисунок 6**



**рисунок 7**



**рисунок 8**



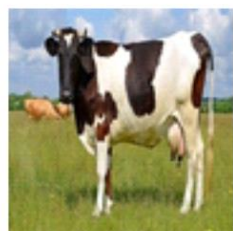
**рисунок 9**



**рисунок 10**



**рисунок 11**



**рисунок 12**



**рисунок 13**



**рисунок 14**



**рисунок 15**

Растения, в отличие от животных, не могут убежать от врагов, поэтому в процессе эволюции у них выработались различные механизмы защиты.

**Напишите номера картинок, чтобы получился ряд:**

**растение – способ защиты (напишите какой, например, механический, химический, симбиоз, мимикрия и т.д.) – кто угрожает растению.**

Всего должно получиться **5 рядов**.

На рисунках с 1 по 5 – растения.

На рисунках с 6 по 10 – варианты защиты.

На рисунках с 11 по 15 – те, кто угрожает растению.

**Всего – 10 баллов (по 2 балла за правильный ряд)**

### Решение варианта 1

Рисунок 1 акация – рисунок 7 танины (химический) – рисунок 14 антилопа Куду.

Рисунок 2 горчица – рисунок 8 синигрин (химический) – рисунок 12 (коровы и прочие травоядные).

Рисунок 3 рябчик Делавея – рисунок 6 рябчик Делавея в камуфляжной окраске – рисунок 15 человек.

Рисунок 4 кактус – рисунок 10 колючки (механический способ защиты) – рисунок 13 пекари (также засчитывается ответ рисунок 12, рисунок 14 не засчитывается, так как разные географические зоны).

Рисунок 5 аквилегия (*Aquilegia eximia*) – рисунок 10 паук-охранник *Mecaphesa schlingeri* – рисунок 11 гусеницы бабочки *Heliothis phloxiphaga*.

## Вариант 2



**рисунок 1**



**рисунок 2**



**рисунок 3**



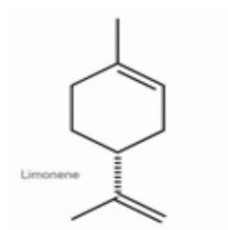
**рисунок 4**



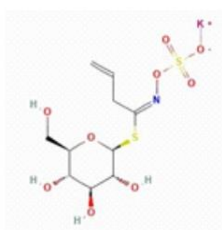
**рисунок 5**



**рисунок 6**



**рисунок 7**



**рисунок 8**



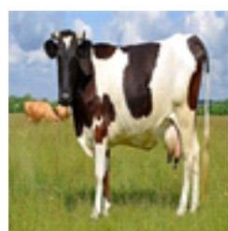
**рисунок 9**



**рисунок 10**



**рисунок 11**



**рисунок 12**



**рисунок 13**



**рисунок 14**



**рисунок 15**

Растения, в отличие от животных, не могут убежать от врагов, поэтому в процессе эволюции у них выработались различные механизмы защиты.

**Напишите номера картинок, чтобы получился ряд:**

**растение – способ защиты (напишите какой, например, механический, химический, симбиоз, мимикрия и т.д.) – кто угрожает растению.**

Всего должно получиться **5 рядов**.

На рисунках с 1 по 5 – растения.

На рисунках с 6 по 10 – варианты защиты.

На рисунках с 11 по 15 – те, кто угрожает растению.

***Всего – 10 баллов (по 2 балла за правильный ряд)***

## **Решение варианта 2**

Рисунок 1 эвкалипт – рисунок 7 лимонен (химический) – рисунок 14 термиты.

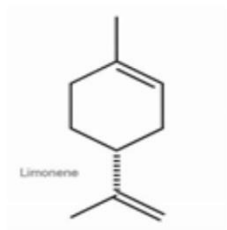
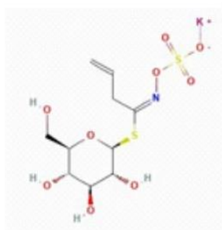
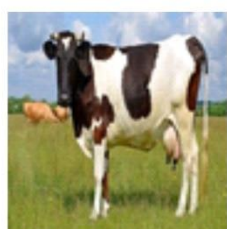
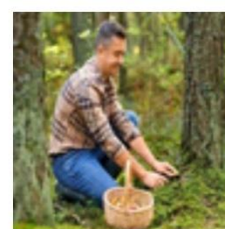
Рисунок 2 горчица – рисунок 8 синигрин (химический) – рисунок 12, 13 (коровы и прочие травоядные).

Рисунок 3 рябчик Делавея – рисунок 6 рябчик Делавея в камуфляжной окраске – рисунок 15 человек.

Рисунок 4 крапива двудомная – рисунок 10 жгучие волоски на стебле крапивы (химический) – рисунок 12, рисунок 13.

Рисунок 5 акация муравьиная – рисунок 9 муравей – рисунок 11 гусеницы и прочие насекомые.



**Вариант 3****рисунок 1****рисунок 2****рисунок 3****рисунок 4****рисунок 5****рисунок 6****рисунок 7****рисунок 8****рисунок 9****рисунок 10****рисунок 11****рисунок 12****рисунок 13****рисунок 14****рисунок 15**

Растения, в отличие от животных, не могут убежать от врагов, поэтому в процессе эволюции у них выработались различные механизмы защиты.

**Напишите номера картинок, чтобы получился ряд:**

**растение – способ защиты (напишите какой, например, механический, химический, симбиоз, мимикрия и т.д.) – кто угрожает растению.**

Всего должно получиться **5 рядов**.

На рисунках с 1 по 5 – растения.

На рисунках с 6 по 10 – варианты защиты.

На рисунках с 11 по 15 – те, кто угрожает растению.

**Всего – 10 баллов (по 2 балла за правильный ряд)**

**Решение варианта 3**

Рисунок 1 эвкалипт – рисунок 7 лимонен (химический) – рисунок 14 термиты.

Рисунок 2 горчица – рисунок 8 синигрин (химический) – рисунок 12, 13 (коровы и прочие травоядные).

Рисунок 3 рябчик Делавея – рисунок 6 рябчик Делавея в камуфляжной окраске – рисунок 15 человек.

Рисунок 4 крапива двудомная – рисунок 10 жгучие волоски на стебле крапивы (химический) – рисунок 12, рисунок 13.

Рисунок 5 горошек – рисунок 9 оса-наездница – рисунок 11 тля.

#### **Вариант 4**



**рисунок 1**



**рисунок 2**



**рисунок 3**



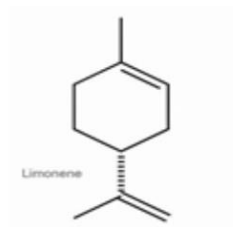
**рисунок 4**



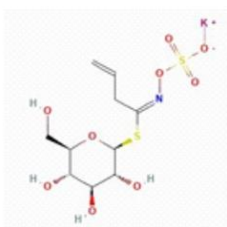
**рисунок 5**



**рисунок 6**



**рисунок 7**



**рисунок 8**



**рисунок 9**



**рисунок 10**



**рисунок 11**



**рисунок 12**



**рисунок 13**



**рисунок 14**



**рисунок 15**

Растения, в отличие от животных, не могут убегать от врагов, поэтому в процессе эволюции у них выработались различные механизмы защиты.

**Напишите номера картинок, чтобы получился ряд:**

**растение – способ защиты (напишите какой, например, механический, химический, симбиоз, мимикрия и т.д.) – кто угрожает растению.**

Всего должно получиться **5 рядов**.

На рисунках с 1 по 5 – растения.

На рисунках с 6 по 10 – варианты защиты.

На рисунках с 11 по 15 – те, кто угрожает растению.

**Всего – 10 баллов (по 2 балла за правильный ряд)**

#### **Решение варианта 4**

Рисунок 1 эвкалипт – рисунок 7 лимонен (химический) – рисунок 14 термиты.

Рисунок 2 горчица – рисунок 8 синигрин (химический) – рисунок 12 (коровы и прочие травоядные).

Рисунок 3 яснотка белая – рисунок 6 крапива, на которую яснотка очень похожа (мимикрия) – рисунок 12, 15 травоядные.

Рисунок 4 кактус – рисунок 10 колючки (механический способ защиты) – рисунок 13 пекари (также засчитывается ответ рисунок 12 и 15).

Рисунок 5 аквилегия (*Aquilegia eximia*) – рисунок 9 паук-охранник *Mecaphesa schlingeri* (симбиоз) – рисунок 11 гусеницы бабочки *Heliothis phloxiphaga*.